ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004-2005

Corso Sperimentale P.N.I.

Tema di MATEMATICA - 23 giugno 2005

Svolgimento a cura della prof.ssa Sandra Bernecoli (sandrabernecoli@interfree.it) e del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

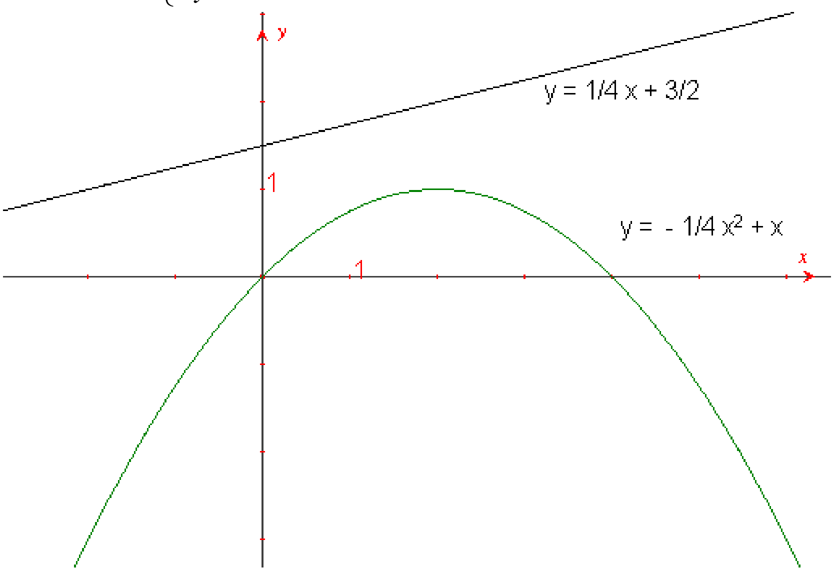
RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Le curve di equazione

$\lambda : x^2 = 4(x-y)$, $r : 4y = x+6$ sono rispettivamente una parabola con asse parallelo all'asse y e vertice in $V(2, 1)$ e r una retta di coefficiente angolare $\frac{1}{4}$.

Punto 1

Le due curve non hanno punti comuni dal momento che l'equazione risolvente $x^2 - 3x + 6 = 0$ del sistema $\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ 4y = x+6 \end{cases}$ ha discriminante negativo.



Punto 2

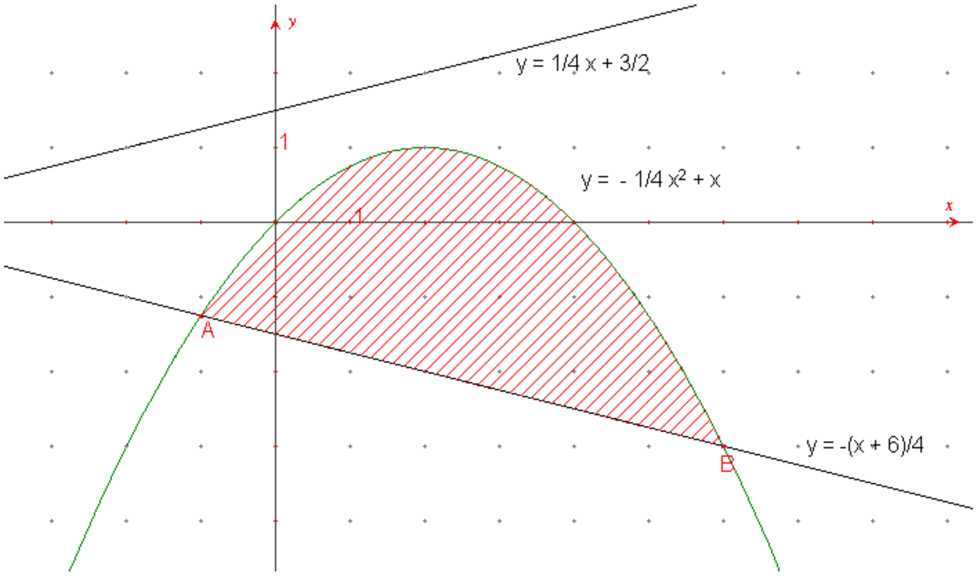
Sia $P\left(x, -\frac{1}{4}x^2 + x)\right)$ un punto generico di λ. La sua distanza da r sarà

$d(x) = \frac{\left| x - 4\left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right) + 6 \right|}{\sqrt{1+16}} = \frac{x^2 - 3x + 6}{\sqrt{17}}$. Tale distanza sarà minima quando il numeratore è minimo, ossia per $x = \frac{3}{2}$ (il numeratore è minimo per $x = \frac{3}{2}$, l'ascissa del vertice della parabola $y = x^2 - 3x + 6$); il punto alla minima distanza sarà pertanto il punto $P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{16}\right)$.

Punto 3

Le equazioni della simmetria rispetto all'asse delle x sono $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ pertanto l'equazione della retta s, simmetrica di r, rispetto a tale asse sarà $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.

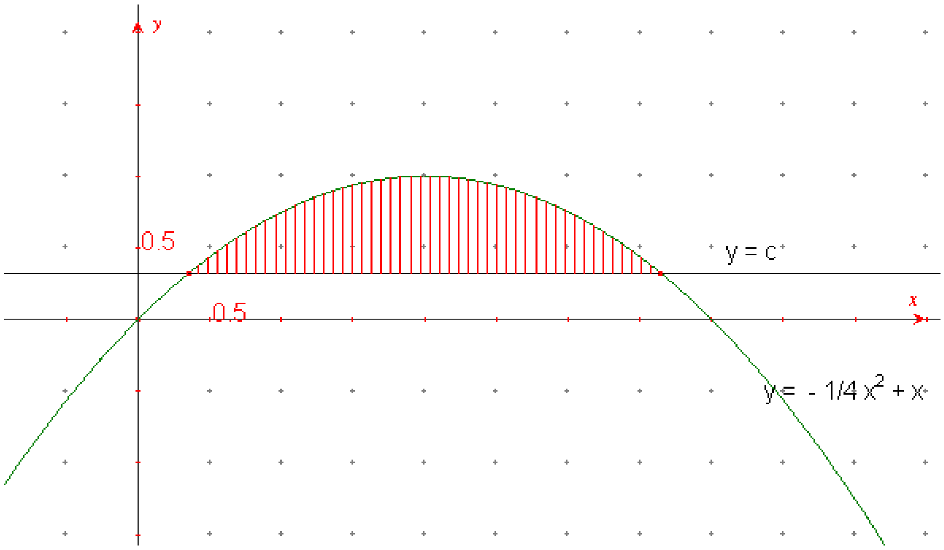
Questa retta interseca la parabola nei punti di ascisse $x = -1$ e $x = 6$.



L'area cercata è data da $\int_{-1}^{6}\left(-\frac{1}{4}x^2+x-\left(-\frac{1}{4}x-\frac{6}{4}\right)\right)dx=\int_{-1}^{6}\left(-\frac{x^2-5x-6}{4}\right)dx=\frac{343}{24}$.

Punto 4

L'area della regione S è $\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^2+x\right)dx=\frac{8}{3}$, la retta $y=c$ interseca λ nei punti di ascissa $x_1=2\left(1-\sqrt{1-c}\right)$ e $x_2=2\left(1+\sqrt{1-c}\right)$.



Il valore di c verrà calcolato risolvendo la seguente equazione:

$$\int_{2-2\sqrt{1-c}}^{2+2\sqrt{1-c}}\left(-\frac{1}{4}x^2+x-c\right)dx=\frac{4}{3}.$$

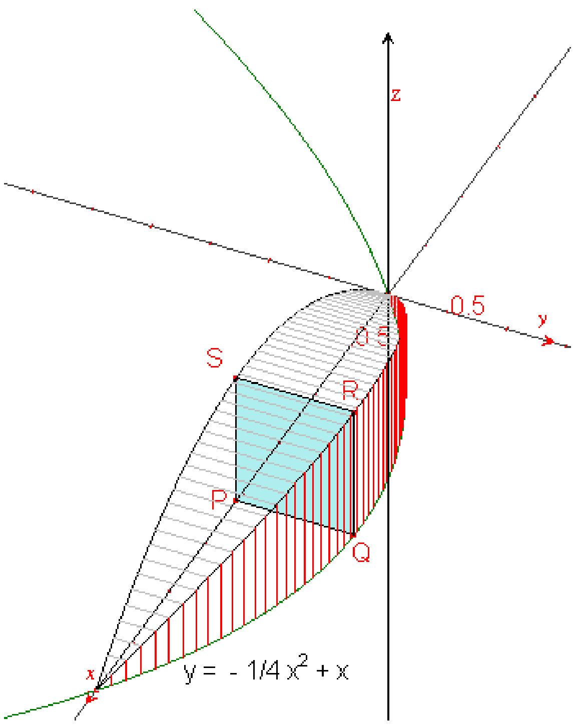
Si trova $c=1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\approx 0{,}37$.

Per determinare c, si poteva anche usare la regola di Archimede per determinare l'area di un segmento parabolico, e scrivere l'equazione: $\frac{2}{3}4\sqrt{1-c}\cdot(1-c)=\frac{4}{3}$, da cui si ricava lo stesso valore di c determinato in precedenza.

Punto 5

Nella seguente figura, è stato disegnato un quadrato PQRS, dove P è un punto dell'asse x con $0\le x\le 4$. Il quadrato PQRS appartiene ad un piano perpendicolare all'asse x. Al variare del punto P, il quadrato PQRS, di area $S(x)=\overline{PQ}^2=y^2(x)$, descrive un solido il cui volume si può determinare usando la seguente formula:

$$V=\int_a^b S(x)\cdot dx.$$



Per determinare il volume del solido richiesto si calcola quindi il seguente integrale:

$$V=\int_0^4\left(-\frac{1}{4}x^2+x\right)^2 dx=\int_0^4\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2\right)dx=\frac{32}{15}.$$