ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004-2005

Corso Sperimentale P.N.I.

Tema di MATEMATICA - 23 giugno 2005

Svolgimento a cura della prof.ssa Sandra Bernecoli e del prof. Luigi Tomasi
(luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto 1

La funzione data $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$, per $x>0$ è ovviamente derivabile e pertanto è anche continua. Resta da verificare la continuità nel punto $x=0$. In $x=0$ si ha $f(0)=1$; calcoliamo pertanto il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right].$$

Calcolando il limite ausiliario

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2(3-2\ln x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3-2\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-2\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}\right)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0\ ,$$

si trova che $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)$.

Quindi la funzione data è continua per $x=0$.

Per quanto riguarda la derivabilità, si ha:

$$f'(x)=2x(1-\ln x)$$

che ovviamente non esiste per $x=0$.

Nel punto $x=0$ calcoliamo se esiste finito il limite del rapporto incrementale (destro), dato da

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

Si ottiene

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{3h^2}{2}+h\cdot\ln h\right).$$

Per calcolare questo limite occorre calcolare il limite seguente, che si presenta in forma indeterminata:

$$\lim_{h\to 0^+}(h\cdot\ln h).$$

Applicando la regola di De L'Hopital, si trova che tale limite è 0. Quindi la funzione $f(x)$ è derivabile (a destra) anche nel punto $x=0$, con $f'(0)=0$. Pertanto:

$$f'(x)=\begin{cases}2x(1-\ln x) & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Punto 2

Per dimostrare che l'equazione $f(x)=0$ ammette un'unica radice in $]0,+\infty[$ studiamo il segno della $f'(x)$. Si osserva subito che $f'(x)\geq 0$ per $0\leq x\leq e$. Quindi $x=e$ è un punto di massimo relativo (e assoluto) della funzione; tale massimo vale $f(e)=\frac{1}{2}e^2+1\approx 4{,}69...$. Calcolando inoltre la derivata seconda si ottiene: $f''(x)=-2\ln x$. Quindi il punto di ascissa $x=1$ è un punto di flesso discendente della curva dove si ha $f(1)=5/2$. Si ha inoltre:

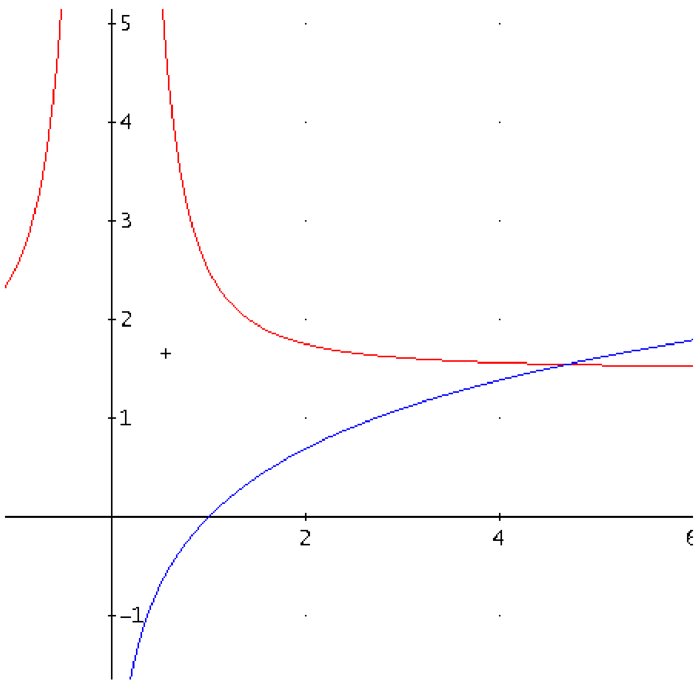
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1) = -\infty .$$

Pertanto esiste uno e un solo punto $x=\alpha$, in cui la funzione si annulla, con $\alpha>e$.
Per determinare un intervallo in cui è compresa la radice $x=\alpha$, si deve risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1=0$$

che equivale all'equazione $\ln x=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2}$.

Tale equazione equivale al sistema formato da due curve (vedi grafico seguente): $\begin{cases} y=\ln x \\ y=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2} \end{cases}$.

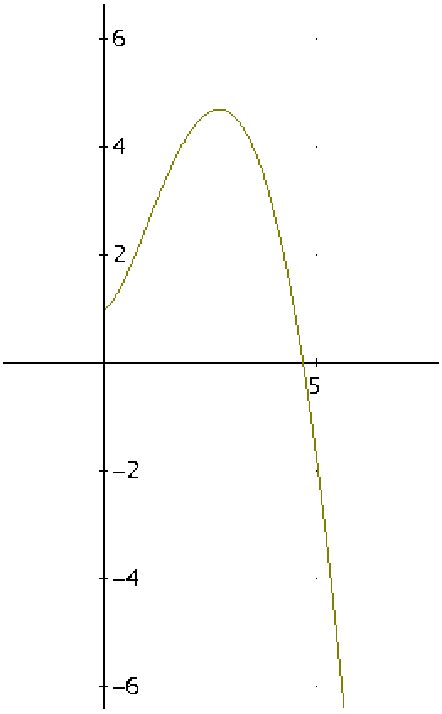


Dal grafico si ricava che la radice α sta tra 4 e 5. Nell'intervallo [4, 5] la funzione $f(x)$ verifica le ipotesi per l'applicazione del metodo delle tangenti di Newton: $f(x)$ è continua e $f(4)\cdot f(5)<0$; per ogni *x* dell'intervallo [4,5] si ha $f'(x)<0$ e $f''(x)<0$. Si parte dall'estremo *x*=5, iterando la seguente formula:

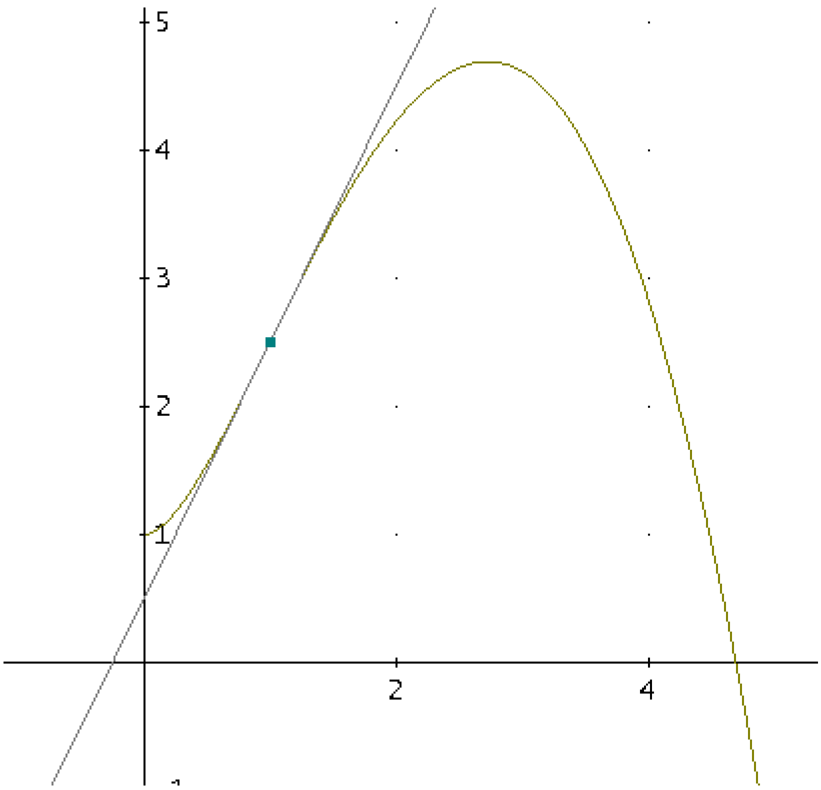
$$\alpha_{n+1}=\alpha_n-\frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}.$$

Dopo 3 iterazioni del metodo di Newton si trova che la radice vale circa $\alpha=4{,}6901...$.

Punto 3
A questo punto siamo in grado di disegnare il grafico C della curva data (vedi figura seguente).



Determiniamo l'equazione della retta tangente nel punto $P\left(1,\frac{5}{2}\right)$. Si trova come tangente di flesso la retta di equazione: $y = 2x + \frac{1}{2}$.

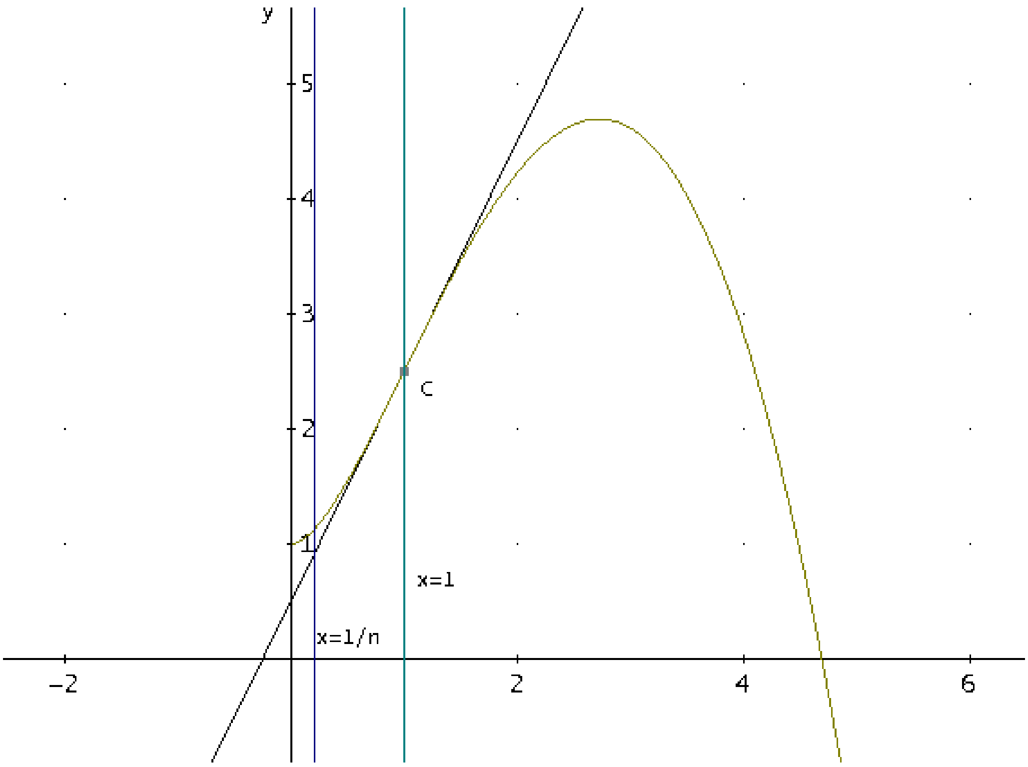


Punto 4
Nell'intervallo [0,1] la curva è convessa; quindi la tangente di flesso sta "al di sotto" della curva. L'area richiesta è pertanto data dal seguente integrale:

$$A_n = \int_{1/n}^{1} \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2\ln x) + 1 - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx$$

che fornisce:

$$A_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{3n^3} \ln \frac{1}{n}.$$



Il limite di tale area è:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{1}{9}.$$

Il valore ottenuto rappresenta l'area della regione di piano compresa tra la curva, la tangente di flesso, l'asse delle ordinate e la retta $x = 1$.