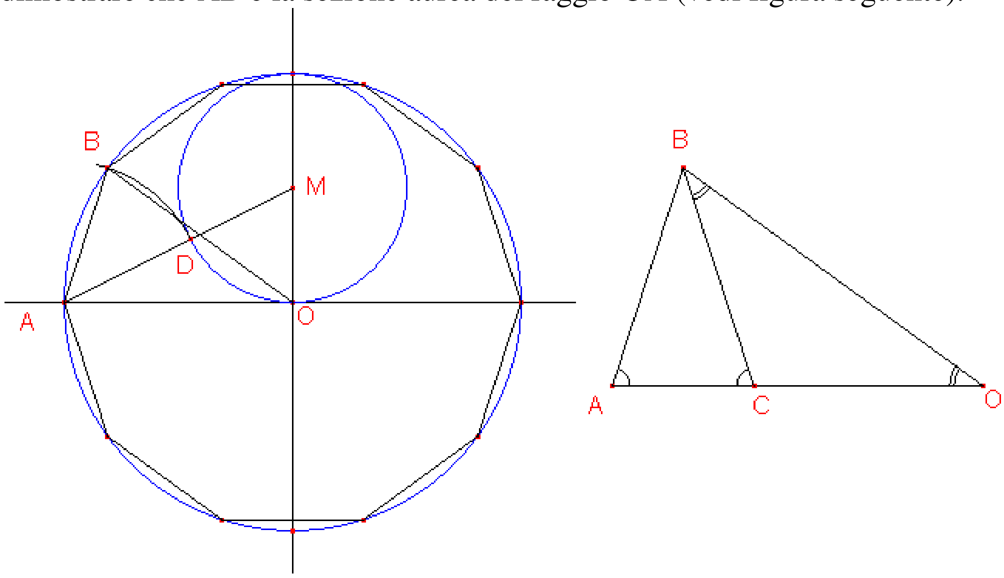
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004-2005
Corso Sperimentale P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 23 giugno 2005

Svolgimento a cura della prof.ssa Sandra Bernecoli e del prof. Luigi Tomasi
(luigi.tomasi@libero.it)

RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

Quesito n. 1
Sia AB il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di centro O. Vogliamo dimostrare che AB è la sezione aurea del raggio OA (vedi figura seguente).



Infatti, unito O con i punti A e B, si ha che l'angolo AOB è la decima parte di un angolo giro, ossia è un angolo di 36°.
Poiché il triangolo AOB è isoscele, essendo il suo angolo al vertice di 36°, gli angoli alla base OAB, OBA sono di 72°.
Nel triangolo ABO si tracci ora la bisettrice dell'angolo OBA e sia C la sua intersezione con il lato OA. Si consideri il triangolo ABC; esso è simile al triangolo AOC. Si dimostra inoltre facilmente che il triangolo OBC è isoscele; gli angoli CBO e COB sono uguali (a 36°). Si ha quindi che AB=BC=CO. Dalla similitudine tra i triangoli OAB e BAC, si ottiene la seguente proporzione

$$OA : AB = AB : AC$$

da cui si ricava, dato che AB=OC:

$$OA : OC = OC : AC\,.$$

Quindi OC è medio proporzionale tra il segmento OA e il segmento AC (che è la differenza tra il segmento OA e OC), ossia OC è la sezione aurea di OA. Chiamata x la misura del segmento OC, si ottiene:

$$r : x = x : (r - x)$$

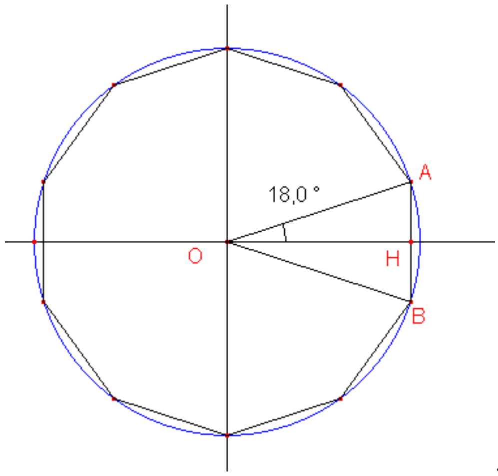
da cui si ricava la seguente equazione:

$$x^2 = r(r - x).$$

Risolvendo l'equazione e scartando la soluzione negativa, possiamo concludere che:

$$x = \overline{OC} = l_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Consideriamo la circonferenza goniometrica in cui AB è il lato del decagono regolare in essa inscritto.



Si ha $\sin 18° = \overline{HA} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Da questa si ricava che $\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2(18°)} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$. Quindi, si ottiene: $\sin 36° = 2 \cdot \sin 18° \cdot \cos 18° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Quesito n. 2

Definizione di retta tangente ad una curva in un suo punto: se la funzione $y = f(x)$ è derivabile in un punto x_0 si definisce retta tangente alla curva che rappresenta il grafico di $f(x)$ in x_0, la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$e avente come coefficiente angolare $f'(x_0)$. Tale retta avrà per equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sia $f(x) = x\sin x$, avremo $f'(x) = \sin x + x\cos x$. Se $\sin x = 1$ allora $\cos x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in Z$ inoltre $f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1$; la retta tangente al grafico di f in questi puniti sarà $y - \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1\left(x - \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$, con k$\in$ Z e quindi $y = x$ sarà la retta tangente.

Si procede analogamente per i punti in cui $\sin x = -1$, trovando che la retta tangente in tali punti ha equazione $y = x$.

Quesito n. 3

La traslazione $\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$ può essere considerata come la composizione di due simmetrie assiali rispetto a due rette parallele e perpendicolari al vettore della traslazione avente per componenti$\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$.

Le rette potrebbero essere, ad esempio, *y=x* e *y=x+q,* con *q* da determinarsi.

Si ha $\varphi: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}, \quad \sigma: \begin{cases} x' = y - q \\ y' = x + q \end{cases}.$

In questo caso $\sigma \circ \varphi: \begin{cases} x' = x - q \\ y' = y + q \end{cases}$; dovrà allora essere $q = -\sqrt{5}$.

Se si considera invece $\varphi \circ \sigma: \begin{cases} x' = x + q \\ y' = y - q \end{cases}$; in questo caso si ottiene $q = \sqrt{5}$.

Quesito n. 4

Il volume del cilindro è dato da $V = \pi r^2 h$. Poiché il volume è dato, possiamo ricavare l'altezza *h* in funzione di *r*. Si ottiene $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

La superficie totale è data dalla funzione $S_{tot}(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

La derivata prima della funzione è: $S'_{tot}(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$.

Dallo studio del segno della derivata prima si ricava che la minima superficie totale si ha per $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ e $h = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Sostituendo V=0,4 litri=400 cm^3, si ottiene che $r \approx 3.99..$ cm e $h \approx 7.986...$ cm.

Quesito n. 5

Il numero di Nepero viene definito come limite della successione $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$:

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828....$$

Si dimostra che la successione $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, con $n \in N_0$, è monotona crescente e limitata, con tutti i termini compresi tra 2 e 3. Si può vedere che la convergenza ad *e* è piuttosto lenta.
Si ha inoltre

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

La successione $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ è invece decrescente e tende anch'essa ad *e* per eccesso.

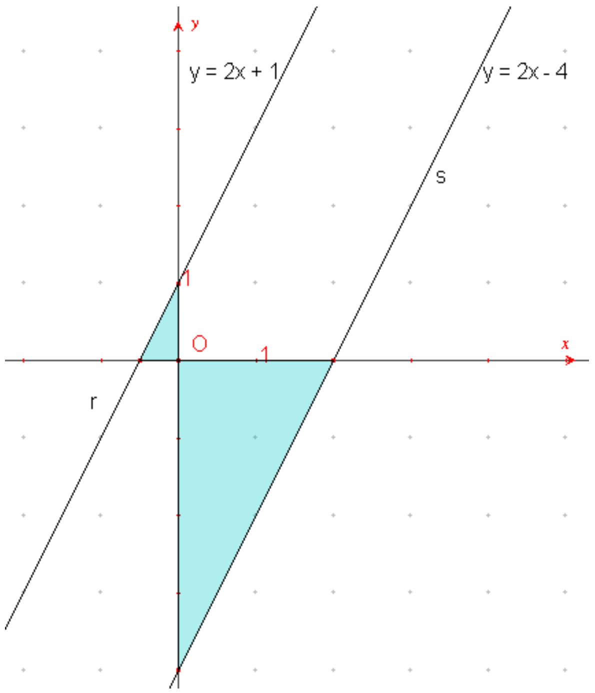
Questo numero è fondamentale in matematica e in moltissime applicazioni.
Si dimostra, ma ciò non è per nulla elementare, che e è un numero irrazionale e trascendente.
Il numero *e* viene assunto come base di un sistema di logaritmi detti neperiani o naturali. La funzione $f(x) = e^x$ è la funzione esponenziale più importante e possiede molte proprietà. Ad esempio, la sua derivata è la funzione stessa, la sottotangente al grafico è costante,… . La funzione è invertibile e la sua funzione inversa è $y = \ln x$. La derivata di quest'ultima funzione è $y' = \dfrac{1}{x}$.

Si rinvia ad un buon libro di testo di matematica per la scuola superiore o per il primo anno di università. Consigliamo il seguente:

-M. Impedovo, *Matematica generale con il calcolatore,* Springer, Milano 2005.

Descriviamo una possibile procedura per calcolare il numero *e* con una precisione voluta.
Occorre definire inizialmente una funzione potenza che riceve in ingresso una base reale positiva e un esponente intero: potenza (base, n).
Nella procedura si incrementa un numero naturale n e si fissa un numero di cifre k.
Ciclo calcola la potenza pot1=potenza(1+1/n, n), la potenza pot2=potenza(1+1/n, n+1) e la loro differenza diff = pot2−pot1.
Il ciclo termina se (pot2−pot1) < potenza(10, −k).
Alla fine si comunica in uscita il valore di pot1 (come valore approssimato di *e*).

Quesito n. 6



Le due rette sono parallele (come deve essere per un'omotetia) e le rette *r* ed *s* si corrispondono secondo un'omotetia di centro O di equazioni:

$$\sigma \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}$$

o viceversa tramite l'omotetia inversa:

$$\sigma^{-1} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}x' \\ y = -\dfrac{1}{4}y' \end{cases},$$

Quesito n. 7

Dato un numero naturale *n* non nullo, si definisce fattoriale di *n* e si indica con $n!$, il seguente numero naturale

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots 2\cdot 1,$$

ovvero il prodotto di tutti i numeri naturali non nulli minori od uguali a *n*.

Per definizione si pone 0!=1.
Il fattoriale di un numero *n* si può definire anche in modo ricorsivo:
1. se n=0, si pone $0!=1$, altrimenti
2. $n!=n\cdot(n-1)!$

I fattoriali sono numeri che crescono molto "in fretta".
Nel calcolo combinatorio il fattoriale di un numero *n* rappresenta il numero delle permutazioni di *n* oggetti. Una permutazione è una disposizione semplice di *n* oggetti di classe *n*.
Il legame tra il fattoriale e i coefficienti binomiali è strettissimo, perché la prima proprietà che si dimostra sui coefficienti binomiali, e dalla quale si ricavano tutte le altre, si chiama *legge dei tre fattoriali*:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

che si dimostra facilmente ricordando la formula che fornisce il numero delle combinazioni semplici a partire da *n* oggetti, di classe *k*, con $k\le n$.

Quesito n. 8

Le equazioni parametriche della curva sono $\begin{cases} x=e^t+2 \\ y=e^{-t}+3 \end{cases}$. Ricavando e^t dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene (tenendo conto che $e^t>0$ per ogni *t*) l'equazione seguente $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$. Si tratta pertanto di un'iperbole equilatera di asintoti le rette di equazioni $x=2$ e $y=3$.

La derivata è $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Quindi la retta tangente nel punto (3, 4), avrà per equazione $y=-x+7$.

Quesito n. 9

Indichiamo con

$E_1=\{\text{ottenere un 10 lanciando due dadi}\}$

$E_2=\{\text{ottenere due 10 in 6 lanci di due dadi}\}$

$E_3=\{\text{ottenere almeno due 10 in 6 lanci di due dadi}\}$

Nel lancio di due dadi le possibilità sono 36. le coppie favorevoli sono (6, 4), (4, 6) e (5, 5). Quindi:

$$p(E_1)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

Il modo più rapido per determinare la probabilità del secondo evento è quello di utilizzare la variabile aleatoria bernoulliana:

$$p(E_2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^4=\frac{73205}{995328}\approx 0.0735..=7{,}35\%.$$

Per determinare la probabilità del terzo evento, conviene usare il teorema della probabilità contraria e calcolare prima la

$$p(\overline{E_3})=q=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^5=\frac{2737867}{2985984}\approx 0.9169.$$

Quindi

$$p(E_3) = 1 - q = \frac{248117}{2985984} \approx 0.083 = 8{,}3\% .$$

Quesito n. 10

Indichiamo con m_0 l'età media degli individui con meno di 60 anni e con m_1 l'età media degli individui con età superiore o uguale a 60 anni. Ci si chiede se l'età media della popolazione può essere di 30 anni. Questo significa che:

$$0{,}6m_0 + 0{,}4m_1 = 30 .$$

I vincoli sulle età medie sono

$$\begin{cases} 0 < m_0 < 60 \\ m_1 \geq 60 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ottiene $m_0 = \dfrac{30 - 0{,}4 \cdot m_1}{0{,}6}$. Sostituendo nel vincolo su m_0 si ottiene $-15 < m_1 < 75$. Tale vincolo è compatibile con la condizione $m_1 > 60$.

Dunque è possibile che l'età media della popolazione sia 30 anni e che il 40% degli individui abbiano 60 o più e ciò si verifica se l'età media degli individui con 60 anni o più è non superiore a 75 anni e l'età media degli individui con meno di sessanta anni è

$$m_0 = 50 - \frac{2}{3} m_1 .$$

Ad esempio, se $m_1 = 63$ anni, allora $m_0 = 50 - 42 = 8$ anni.

Questo è compatibile matematicamente, ma difficile da realizzare in una popolazione reale!