ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2005
CORSO DI ORDINAMENTO – Sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 23 giugno 2005

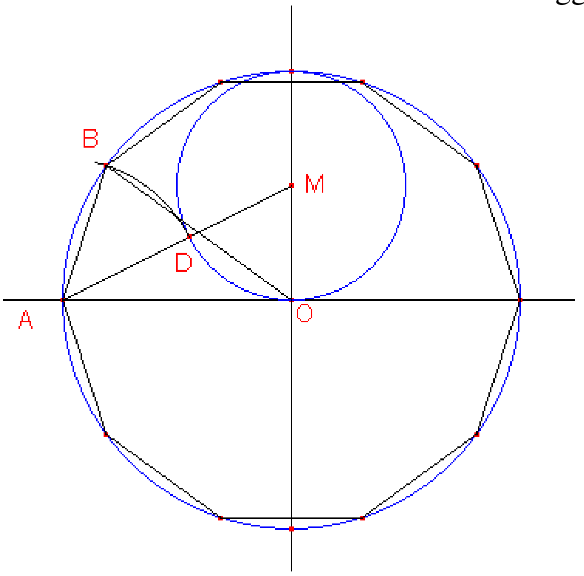
Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

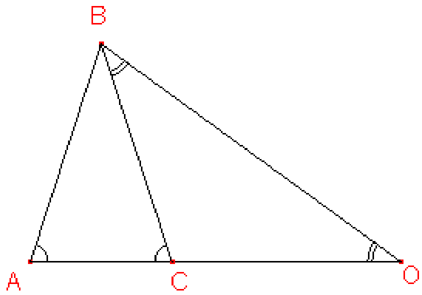
RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

Quesito n. 1 (identico al Quesito 1 PNI)

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°*, *sen36°*.

Sia AB il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di centro O. Vogliamo dimostrare che AB è la sezione aurea del raggio OA (vedi figura seguente).





Infatti, unito O con i punti A e B, si ha che l'angolo AOB è la decima parte di un angolo giro, ossia è un angolo di 36°.
Poiché il triangolo AOB è isoscele, essendo il suo angolo al vertice di 36°, gli angoli alla base OAB, OBA sono di 72°.
Nel triangolo ABO si tracci ora la bisettrice dell'angolo OBA e sia C la sua intersezione con il lato OA. Si consideri il triangolo ABC; esso è simile al triangolo AOC. Si dimostra inoltre facilmente che il triangolo OBC è isoscele; gli angoli CBO e COB sono uguali (a 36°). Si ha quindi che AB=BC=CO. Dalla similitudine tra i triangoli OAB e BAC, si ottiene la seguente proporzione

$$OA : AB = AB : AC$$

da cui si ricava, dato che AB=OC:

$$OA : OC = OC : AC .$$

Quindi OC è medio proporzionale tra il segmento OA e il segmento AC (che è la differenza tra il segmento OA e OC), ossia OC è la sezione aurea di OA. Chiamata x la misura del segmento OC, si ottiene:

$$r : x = x : (r - x)$$

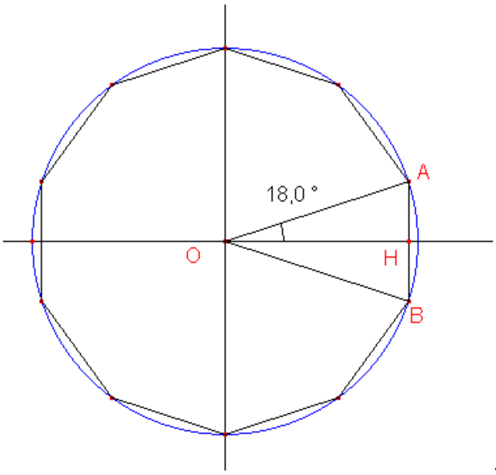
da cui si ricava la seguente equazione:

$$x^2 = r(r - x).$$

Risolvendo l'equazione e scartando la soluzione negativa, possiamo concludere che:

$$x = \overline{OC} = l_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Consideriamo la circonferenza goniometrica in cui AB è il lato del decagono regolare in essa inscritto.



.

Si ha $\sin 18° = \overline{HA} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Da questa si ricava che $\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2(18°)} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$. Quindi, si ottiene: $\sin 36° = 2\cdot\sin 18°\cdot\cos 18° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Quesito n. 2 (identico al Quesito4 del PNI)

2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Il volume del cilindro circolare è dato da $V = \pi r^2 h$. Poiché il volume è assegnato, possiamo ricavare l'altezza *h* in funzione di *r*. Si ottiene $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

La superficie totale è data dalla funzione $S_{tot}(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

La derivata prima della funzione è: $S'_{tot}(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$.

Dallo studio del segno della derivata prima si ricava che la minima superficie totale si ha per $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e quindi per $h = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Sostituendo V=0,4 litri=400 cm^3, si ottiene che $r \approx 3.99..$ cm e $h \approx 7.986...$ cm.

Quesito n. 3 (identico al Quesito2 del PNI)

3. Si dimostri che la curva $y = x\,sen\,x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen\,x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen\,x = -1$

Definizione di retta tangente a una curva in un suo punto: se la funzione $y = f(x)$ è derivabile in un punto x_0 si definisce retta tangente alla curva che rappresenta il grafico di $f(x)$ in x_0, la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$e avente come coefficiente angolare $f'(x_0)$. Tale retta avrà per equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sia $f(x) = x\sin x$, avremo $f'(x) = \sin x + x\cos x$. Se $\sin x = 1$ allora $\cos x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in Z$ inoltre $f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $f'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$; la retta tangente al grafico di f in questi puniti sarà $y - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1\left(x - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$, con $k \in Z$ e quindi $y = x$ sarà la retta tangente.

Si procede analogamente per i punti in cui $\sin x = -1$, trovando che la retta tangente in tali punti ha equazione $y = x$.

Quesito n. 4

4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

Chiamiamo *p* il semiperimetro del rettangolo e con *x* la misura di un lato del rettangolo.
Si ha: $0 \le x \le p$.
L'area del rettangolo sarà:
$A(x) = x(p - x)$, con $0 \le x \le p$.
Il grafico di questa funzione è un arco di parabola, che ha il suo massimo nel vertice, quindi per $x = \frac{p}{2}$, ovvero nel caso in cui il rettangolo è un quadrato.

Quesito n. 5 (simile al Quesito 5 del PNI)

5. Il numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?

Il numero di Nepero viene definito come limite della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828....$$

Si dimostra che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, con $n \in N_0$, è monotona crescente e limitata, con tutti i termini compresi tra 2 e 3. Si può vedere che la convergenza ad *e* è piuttosto lenta.
Si ha inoltre

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

La successione $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è invece decrescente e tende anch'essa ad *e* per eccesso.

Questo numero è fondamentale in matematica e in moltissime applicazioni.
Si dimostra, ma ciò non è per nulla elementare, che e è un numero irrazionale e trascendente.
Il numero e viene assunto come base di un sistema di logaritmi detti neperiani o naturali. La funzione $f(x)=e^x$ è la funzione esponenziale più importante e possiede molte proprietà. Ad esempio, la sua derivata è la funzione stessa, la sottotangente al grafico è costante,... . La funzione è invertibile e la sua funzione inversa è $y=\ln x$.
La derivata della funzione $f(x)=e^x$ è un caso particolare della derivata della funzione $f(x)=a^x$ con a positivo e diverso da 1.
La derivata della funzione $f(x)=a^x$ è $f'(x)=a^x\ln a$, che nel caso particolare in cui $a=e$ fornisce $f'(x)=e^x$

Quesito n. 6 (identico al quesito 7 del PNI)

6. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?

Dato un numero naturale n non nullo, si definisce fattoriale di n e si indica con $n!$, il seguente numero naturale

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdot ...2\cdot 1,$$

ovvero il prodotto di tutti i numeri naturali non nulli minori od uguali a n.
Per definizione si pone 0!=1.
Il fattoriale di un numero n si può definire anche in modo ricorsivo:

1. se n=0, si pone $0!=1$, altrimenti
2. $n!=n\cdot(n-1)!$

I fattoriali sono numeri che crescono molto "in fretta".
Nel calcolo combinatorio il fattoriale di un numero n rappresenta il numero delle permutazioni di n oggetti. Una permutazione è una disposizione semplice di n oggetti di classe n.
Il legame tra il fattoriale e i coefficienti binomiali è strettissimo, perché la prima proprietà che si dimostra sui coefficienti binomiali, e dalla quale si ricavano tutte le altre, si chiama *legge dei tre fattoriali*:

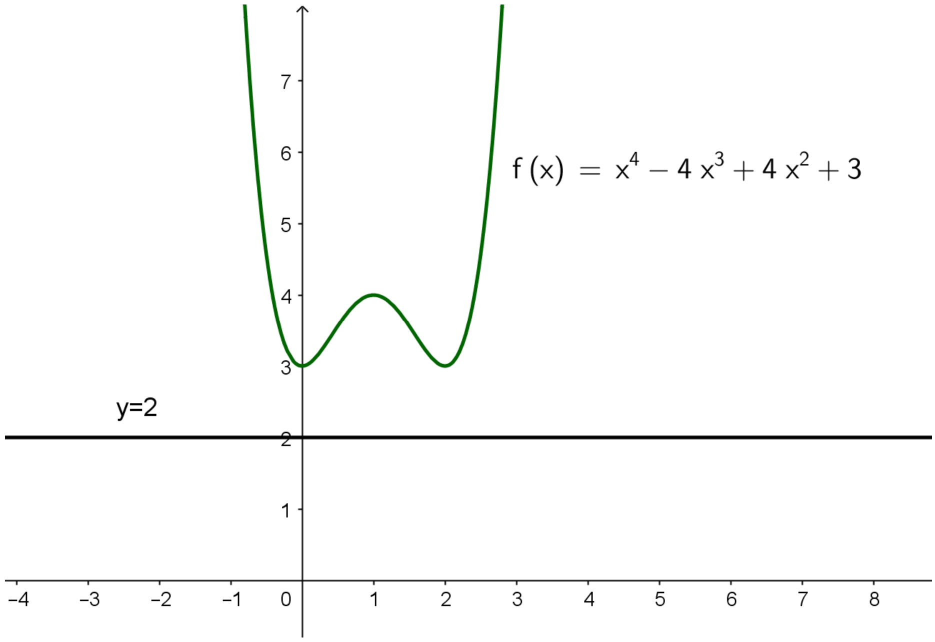
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

che si dimostra facilmente ricordando la formula che fornisce il numero delle combinazioni semplici a partire da n oggetti, di classe k, con $k\le n$.

Quesito n. 7

7. Se $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+3$, per quanti numeri reali k è $f(k)=2$? Si illustri il ragionamento seguito.

Per nessun numero reale, come si vede nella figura. Infatti il grafico della funzione $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+3$ non interseca la retta di equazione $y=2$.

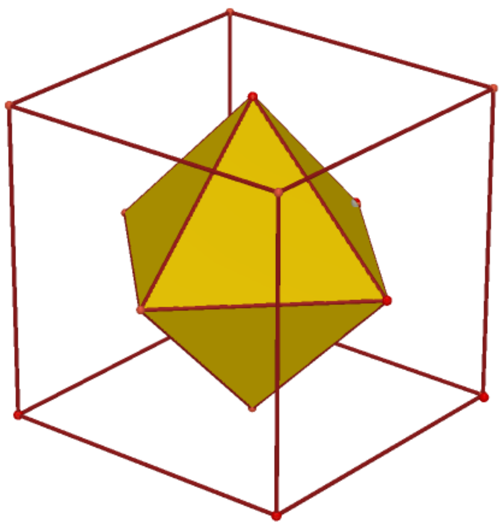


Si potrebbe anche risolvere l'equazione $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2$, che fornisce $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$, che si può scrivere nella forma $x^2(x^2 - 4x + 4) + 1 = 0$, ovvero $x^2(x-2)^2 + 1 = 0$, dove il primo membro è sempre positivo.

Quesito n. 8

8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro regolare, perché le facce sono triangoli equilateri, tutti congruenti tra loro e in ogni vertice dell'ottaedro convergono 4 spigoli. L'ottaedro regolare è il poliedro duale del cubo. Il numero dei vertici dell'ottaedro (6) è uguale al numero delle facce del cubo. Il numero degli spigoli è lo stesso. Vale la relazione di Eulero: F+V-S=2 (si ha 8+6-12=2).



Il volume dell'ottaedro è 1/6 del volume del cubo. Si ha infatti, se *s* è lo spigolo del cubo:

$$V(ottaedro) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \frac{s}{2} = \frac{1}{6} s^3.$$

Quesito n. 9

9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:

$$sen^2(35°) + sen^2(55°)$$

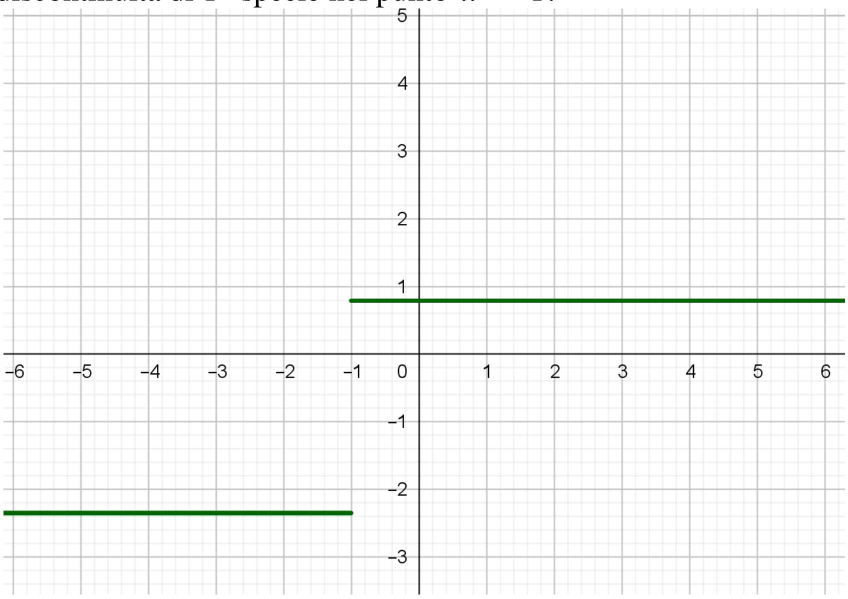
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

Sappiamo che il $\sin(55°) = \cos(35°)$. Quindi il valore richiesto è: $\sin^2(35°) + \cos^2(35°) = 1$.

Quesito n. 10

10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctg\, x - arctg\, \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Il testo è errato.
La funzione non è definita in $x = -1$. Si ottiene il grafico di una funzione costante a tratti, con una discontinuità di 1^ specie nel punto $x = -1$.



La derivata della funzione è:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = 0 .$$

Si vede che dove la funzione è continua, allora è costante. Tuttavia la funzione ha un punto di discontinuità di 1^ specie.
Poiché la funzione è costante a tratti, possiamo calcolarne i valori in due opportuni punti del dominio, uno maggiore di -1 e l'altro minore di -1 (valori notevoli nei quali sappiamo calcolare l'arcotangente).

Se $x = 0$, si ha $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

Se $x = -\sqrt{3}$, si ha $f(x) = -\frac{3\pi}{4}$

La funzione è quindi definita a tratti come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & se \quad x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & se \quad x < -1 \end{cases}.$$