Esame di Stato di Liceo Scientifico 2005

Corso di ordinamento – Seconda prova scritta.
Tema di MATEMATICA - 23 giugno 2005

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

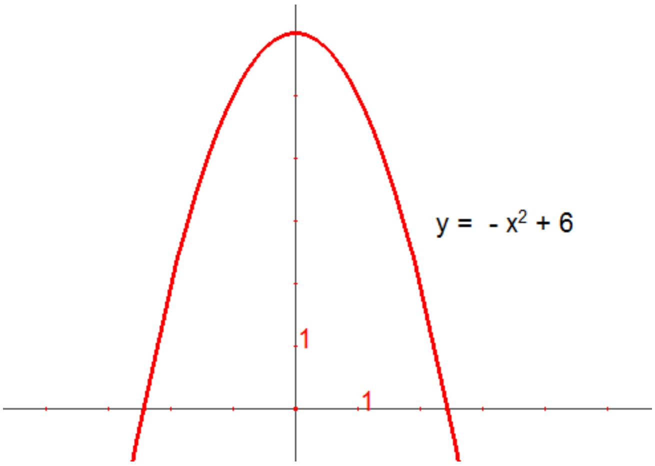
PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di *R*.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di *t* per il quale $A(t)$ è minima.

Risoluzione del problema 1

Disegniamo la parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$ e la regione *R*, limitata, definita dalla parabola con gli assi coordinati. La parabola interseca l'asse y nel punto (0, 6) e l'asse delle *x* nei punti di coordinate $(-\sqrt{6};0)$ e $(\sqrt{6};0)$.

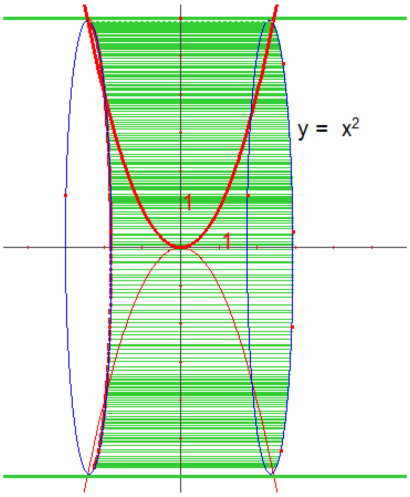


Punto 1
Il volume del solido (paraboloide rotondo) ottenuto dalla rotazione di *R* attorno all'asse *y* è dato dal seguente integrale:

$$V = \pi \int_0^6 \left(\sqrt{6-y}\right)^2 dy = \pi \int_0^6 (6-y)\,dy = \pi \left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^6 =$$
$$= \pi(36-18) = 18\pi$$

Punto 2

Per determinare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la regione *R* attorno alla retta di equazione *y*=6, si può traslare la curva verso il basso di 6, parallelamente all'asse *x*. Si ottiene la curva $y=-x^2$. Si può anche usare la curva $y=x^2$ e far ruotare il segmento parabolico compreso tra $y=-x^2$ e la retta di equazione $y=x$. Si ottiene un cilindro con due cavità tra loro simmetriche.



Il volume si ricava tramite il seguente calcolo:

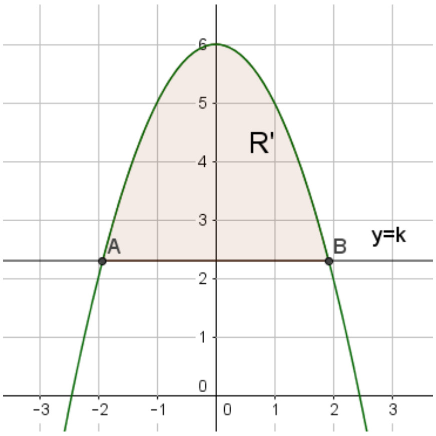
$$V=V_{cil}-V_{rot}=\pi 36\cdot 2\sqrt{6}-2\pi\int_0^{\sqrt{6}}\left(x^2\right)^2 dx=72\pi\sqrt{6}-2\pi\int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx=\frac{288}{5}\pi\sqrt{36}.$$

Punto 3

Calcoliamo l'area della regione *R* con la regola di Archimede:

$$Area(R)=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 6=8\sqrt{6}.$$

Intersechiamo la retta di equazione $y=k$ con la parabola λ. Otteniamo $x=\pm\sqrt{6-k}$ con $0\le k\le 6$.



L'area del segmento parabolico *R'* individuato dalla retta $y=k$ con la parabola λ, usando la regola di Archimede, è data da:

$$Area(R')=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{6-k}\cdot(6-k)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(6-k)^3}.$$

Il valore di *k* tale che la retta di equazione $y=k$ suddivida l'area della regione *R* in due parti uguali si ottiene ponendo

$$Area(R')=4\sqrt{6}$$

ovvero

$$\frac{4}{3}\cdot\sqrt{(6-k)^3}=4\sqrt{6}$$

Risolvendo si ottiene

$$\sqrt{(6-k)^3}=3\sqrt{6}$$

$$k=6-3\sqrt[3]{2}\approx 2,22\,.$$

Punto 4

Il generico punto *P* sull'arco di parabola ha coordinate $P(t,\,6-t^2)$, con $0<t<\sqrt{6}$. La retta tangente nel punto *P,* ha per equazione

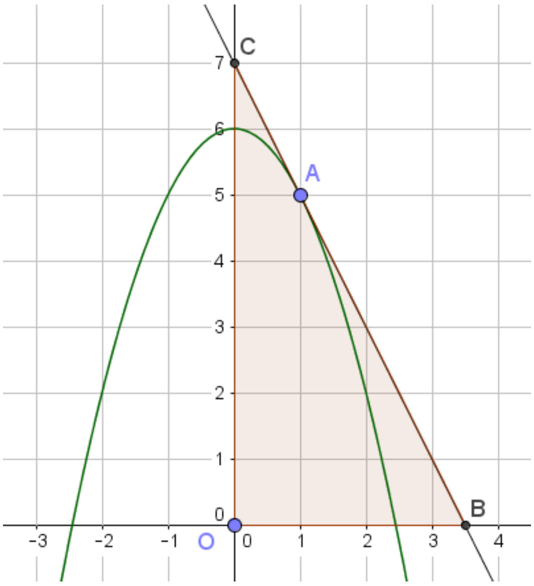
$$y-\left(6-t^2\right)=-2t\left(x-t\right).$$

Intersecando con gli assi coordinati, si ottengono i punti $B\left(\frac{t^2+6}{2t},\,0\right)$ e $C\left(0,\,t^2+6\right)$.

L'area del triangolo *OBC* sarà pertanto

$$A(t)=\frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$$

che fornisce $A(1)=\frac{49}{4}=12,25$.



Punto 5

Il minimo della funzione $A(t)=\frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$ si ottiene calcolando il segno della sua derivata prima:

$$A'(t)=\frac{3}{4}\frac{\left(t^2+6\right)\left(t^2-2\right)}{t^2}.$$

Si trova che il minimo si ha per $t=\sqrt{2}$ e vale $A\left(\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$.