

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2005

Corso di Ordinamento

Tema di MATEMATICA - 23 giugno 2005 – sessione ordinaria

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto 1

La funzione data $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$, per $x > 0$ è ovviamente derivabile e pertanto è anche continua. Resta da verificare la continuità nel punto $x = 0$. In $x = 0$ si ha $f(0) = 1$; calcoliamo pertanto il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \right].$$

Calcolando il limite ausiliario

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2(3 - 2\ln x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3 - 2\ln x}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

si trova che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$.

Quindi la funzione data è continua per $x = 0$.

Per quanto riguarda la derivabilità, si ha:

$$f'(x) = 2x(1 - \ln x)$$

che ovviamente non esiste per $x = 0$.

Nel punto $x = 0$ calcoliamo se esiste finito il limite del rapporto incrementale (destra), dato da

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{3h^2}{2} + h \cdot \ln h \right).$$

Per calcolare questo limite occorre calcolare il limite seguente, che si presenta in forma indeterminata:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (h \cdot \ln h).$$

Applicando la regola di De L'Hopital, si trova che tale limite è 0. Quindi la funzione $f(x)$ è derivabile (a destra) anche nel punto $x = 0$, con $f'(0) = 0$. Pertanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x(1 - \ln x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Punto 2

Per dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica radice in $]0, +\infty[$ studiamo il segno della $f'(x)$. Si osserva subito che $f'(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq e$. Quindi $x = e$ è un punto di massimo

relativo (e assoluto) della funzione; tale massimo vale $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1 \approx 4,69\dots$. Calcolando inoltre la derivata seconda si ottiene: $f''(x) = -2 \ln x$. Quindi il punto di ascissa $x = 1$ è un punto di flesso discendente della curva dove si ha $f(1) = 5/2$. Si ha inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 = -\infty.$$

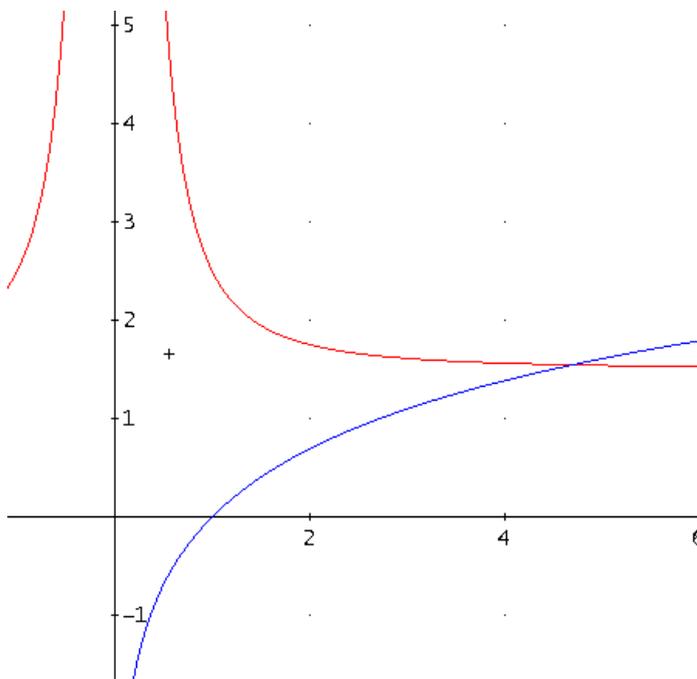
Pertanto esiste uno e un solo punto $x = \alpha$, in cui la funzione si annulla, con $\alpha > e$.

Per determinare un intervallo in cui è compresa la radice $x = \alpha$, si deve risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 = 0$$

che equivale all'equazione $\ln x = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$.

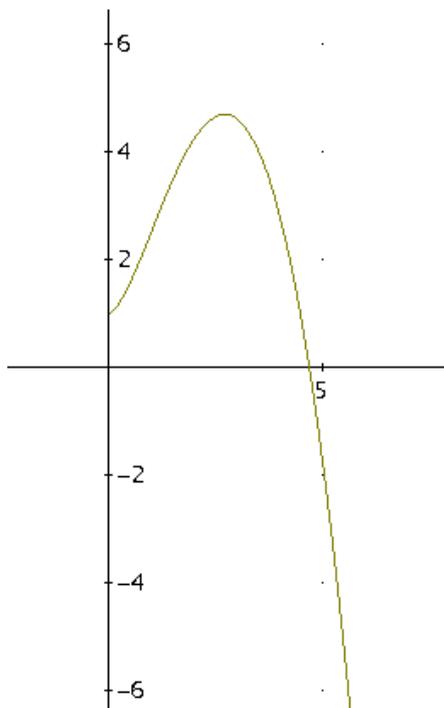
Tale equazione equivale al sistema formato da due curve (vedi grafico seguente): $\begin{cases} y = \ln x \\ y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2} \end{cases}$.



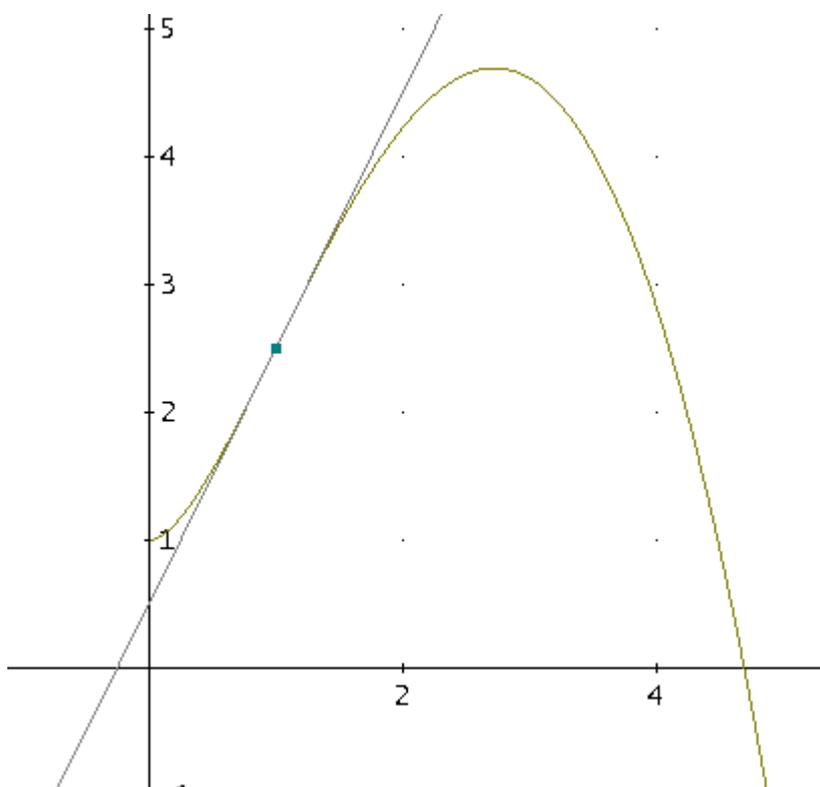
Dal grafico si ricava che la radice α sta tra 4 e 5.

Punto 3

A questo punto siamo in grado di disegnare il grafico C della curva data (vedi figura seguente).



Determiniamo l'equazione della retta tangente nel punto $P\left(1, \frac{5}{2}\right)$. Si trova come tangente di flesso la retta di equazione: $y = 2x + \frac{1}{2}$.



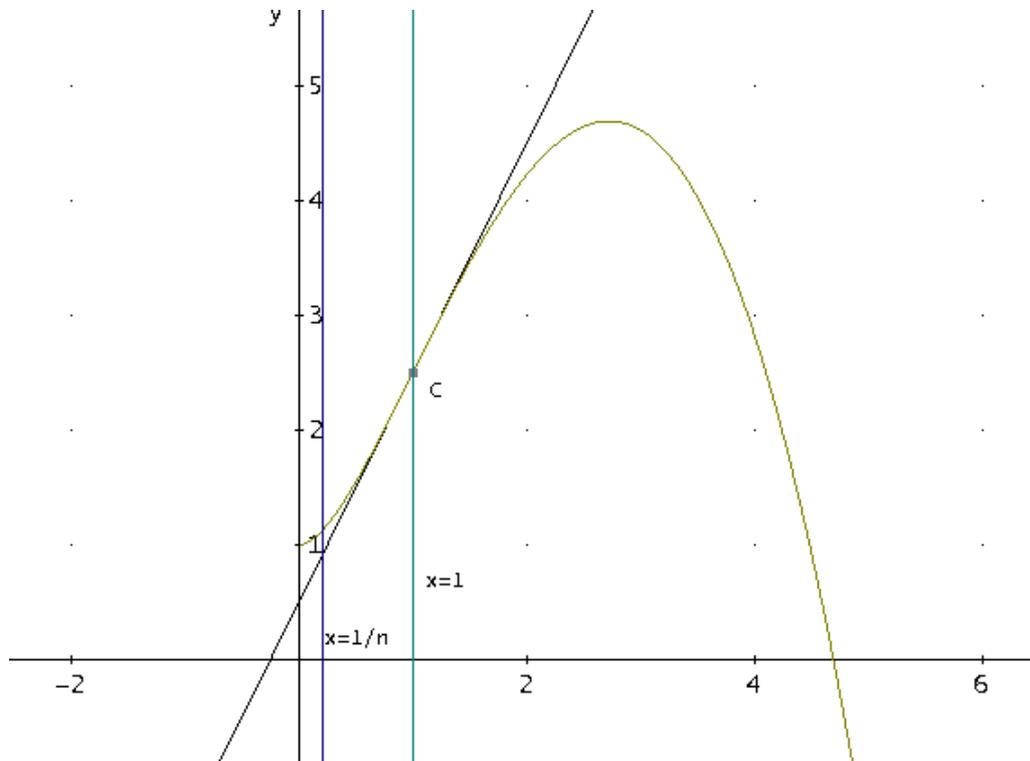
Punto 4

Nell'intervallo $[0,1]$ la curva è convessa; quindi la tangente di flesso sta “al di sotto” della curva. L'area richiesta è pertanto data dal seguente integrale:

$$A_n = \int_{1/n}^1 \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx$$

che fornisce:

$$A_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{3n^3} \ln \frac{1}{n}.$$



Il limite di tale area è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{9}.$$

Il valore ottenuto rappresenta l'area della regione di piano compresa tra la curva, la tangente di flesso, l'asse delle ordinate e la retta $x = 1$.