Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica di ordinamento e PNI - 22 giugno 2006
Soluzione del PROBLEMA 1

Soluzione a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

Problema 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Risoluzione del problema 1

Se il filo ha lunghezza λ, allora il semiperimetro è $\frac{\lambda}{2}$.

a) Se un lato misura x allora l'altro lato misura $\frac{\lambda}{2}-x$ e l'area dell'aiuola è

$$S(x)=x\left(\frac{\lambda}{2}-x\right)$$

con $0 \le x \le \frac{\lambda}{2}$.

Questa funzione è un arco di parabola, con la concavità rivolta verso il basso. Ne consegue che il massimo si ha per $x=\frac{\lambda}{4}$. In questo caso il rettangolo ha i lati uguali e diventa un quadrato di area $\frac{\lambda^2}{16}$.

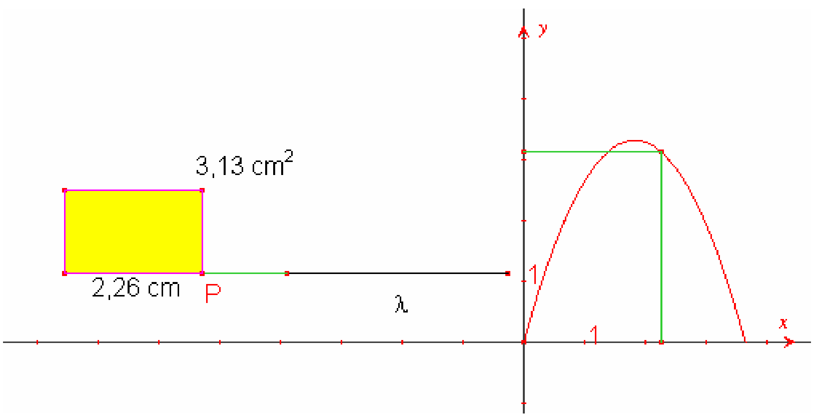

Figura 1

Se si divide il filo in due parti, in modo che una delimiti un'aiuola quadrata e l'altra parte un'aiuola circolare, allora si ottengono due pezzi di filo di lunghezze rispettive x e $\lambda - x$.

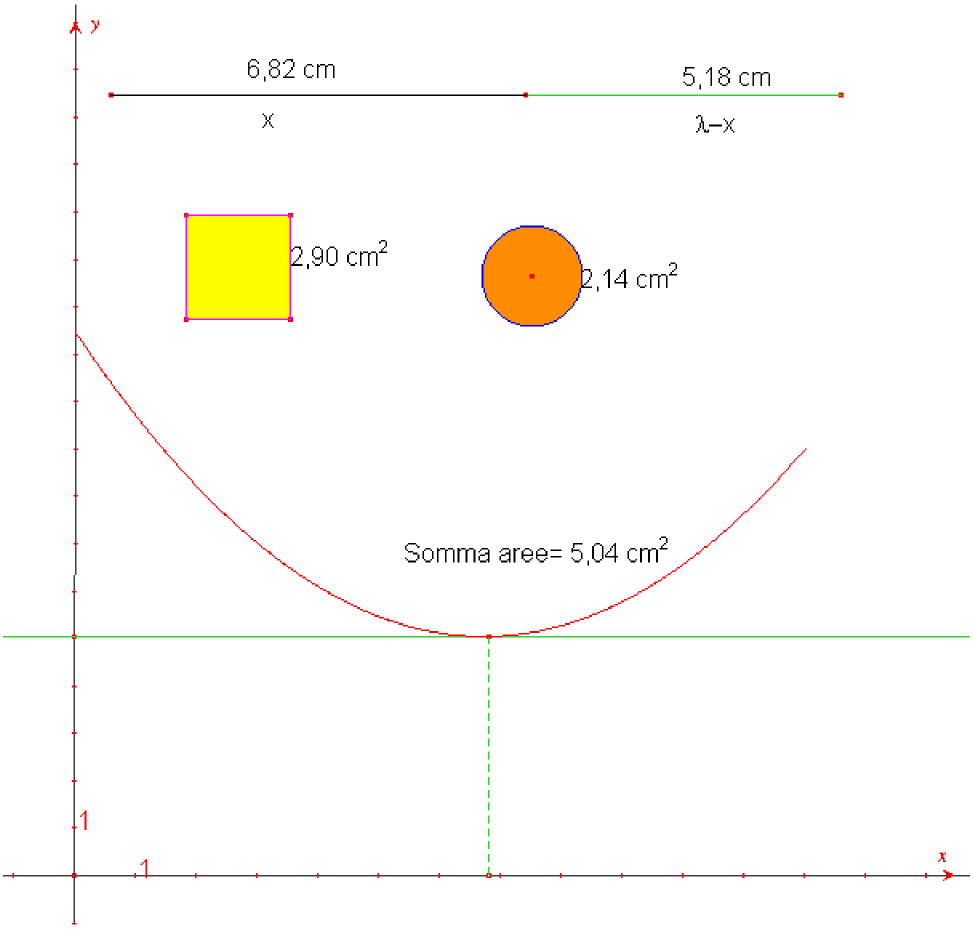

Figura 2

Le aree delle due superfici delimitate diventano

$$A_{quadrato} = \frac{x^2}{16}$$

$$A_{cerchio} = \pi\left[\frac{(\lambda - x)}{2\pi}\right]^2 = \frac{(\lambda - x)^2}{4\pi}$$

L'area totale diventa quindi:

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(\lambda - x)^2}{4\pi}$$

con $0 \le x \le \lambda$.

Si tratta ancora di una parabola, con $A(0) = \frac{\lambda^2}{4\pi}$ e $A(\lambda) = \frac{\lambda^2}{16}$. Si osserva che $A(0) > A(\lambda)$.

Per determinare il punto di minimo basta determinare l'ascissa del vertice della parabola, oppure si può usare la derivata:

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2\pi}(x - \lambda).$$

La somma delle aree è minima per

$$x = \frac{4\lambda}{\pi + 4}.$$

mentre è massima per x=0.

Se ora questa aiuola assume la forma di un parallelepipedo rettangolo, e ciascuna dimensione aumenta del 10%, il volume iniziale V aumenta di un ΔV, che è uguale a:

$$\Delta V = V_{finale} - V_{iniziale} = V \cdot 1{,}1^3 - V = V\left(1{,}1^3 - 1\right) = 0{,}331 \cdot V$$

Quindi l'aumento percentuale è esattamente del:

$$\frac{\Delta V}{V} \cdot 100 = 33{,}1\% \,.$$