Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica PNI - 22 giugno 2006
Soluzione del PROBLEMA 2
Soluzione a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo *a* un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di *a*, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di *a* i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.

2. Si calcoli, posto $a = -e^2$ l'area che è compresa fra i grafici di *f* e *g* (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.

3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per *a* un valore numerico maggiore di $\dfrac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Risoluzione del problema 2

La prima funzione è ben nota ed è una delle più importanti della matematica. La seconda formula rappresenta una famiglia di parabole con vertice nell'origine e asse di simmetria l'asse *y*; per $a = 0$ si ottiene l'asse delle ascisse.

Punto 1

Al variare di *a* l'equazione $\log x = ax^2$ rappresenta l'intersezione tra la funzione logaritmo naturale con una parabola, come nella seguente figura 1, dove sono disegnate tre parabole della famiglia.

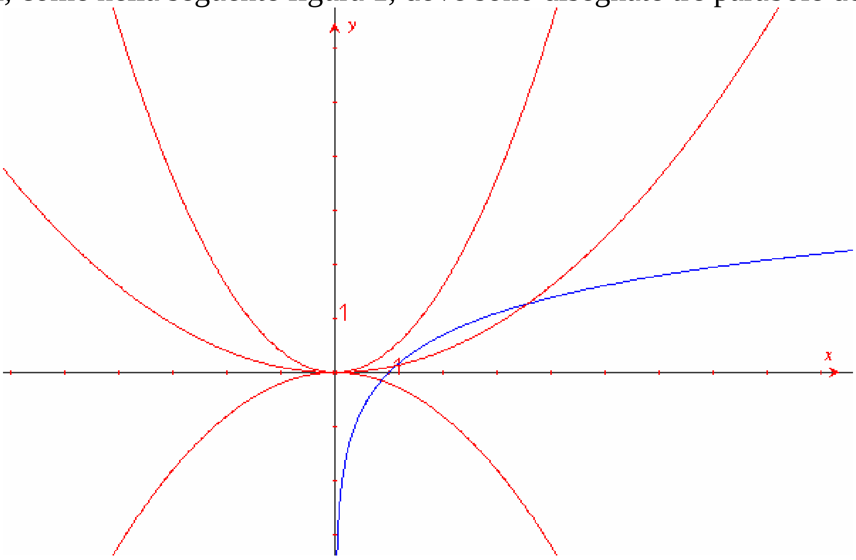

Figura1

E' evidente che al variare del parametro *a* il numero delle intersezioni può essere due, una o nessuna. Osservando la figura si può già dire che se $a \le 0$, allora c'è una sola intersezione tra la parabola e la curva logaritmica.

Per trovare il valore di *a* per cui le due curve sono tangenti tra loro, è sufficiente risolvere il seguente sistema, imponendo che le due curve abbiano la stessa ordinata e, in quel punto, la stessa retta tangente:

$$\begin{cases} \log x = ax^2 \\ \dfrac{1}{x} = 2ax \end{cases}$$

Si ottiene come soluzione che il parametro deve valere $a = \dfrac{1}{2e}$.

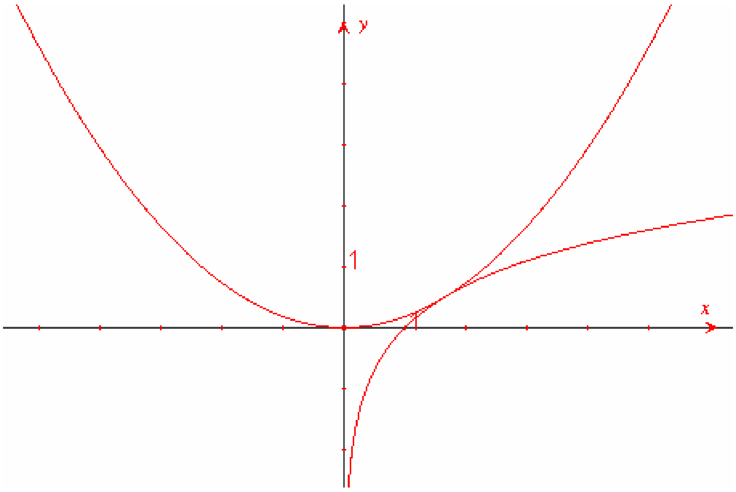

Figura 2

Punto 2

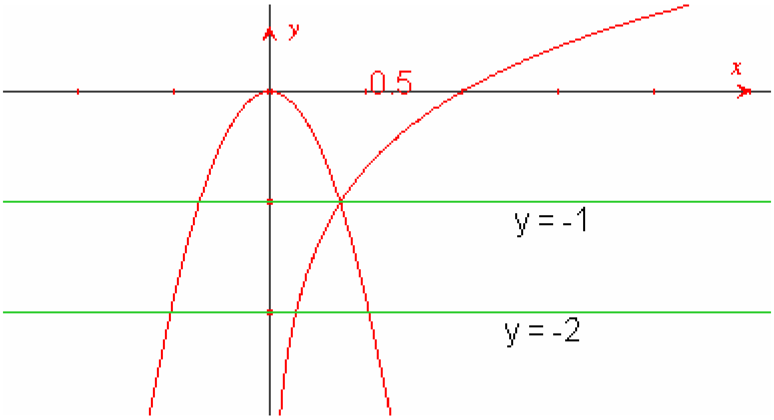

Figura 3

Le funzioni diventano $f(x) = \log x$ e $g(x) = -e^2x^2$, che si incontrano nel punto $\left(\dfrac{1}{e};-1\right)$ che appartiene alla retta $y = -1$.

L'area è data da:

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{e}\sqrt{-y} - e^y\right)dy.$$

Il risultato che si ottiene è

$$\frac{1}{e}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{e^2} \approx 0.215883$$

Punto 3

Se si assegna ad a un valore numerico maggiore di $\dfrac{1}{2e}$, si ottiene una funzione che esiste per $x > 0$ ed è sempre negativa, perché $\ln x > ax^2$ (per ogni $x > 0$). Se ad esempio scegliamo $a = 1$ .otteniamo la funzione $h(x) = \ln x - x^2$, che ha l'andamento indicato nella figura 4. Ricavando la derivata prima si ottiene: $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$. La $f(x)$ funzione ha quindi un massimo in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ha per asintoto l'asse y e volge la concavità verso il basso, perché $f''(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + 2\right)$, che è negativa per ogni $x > 0$.

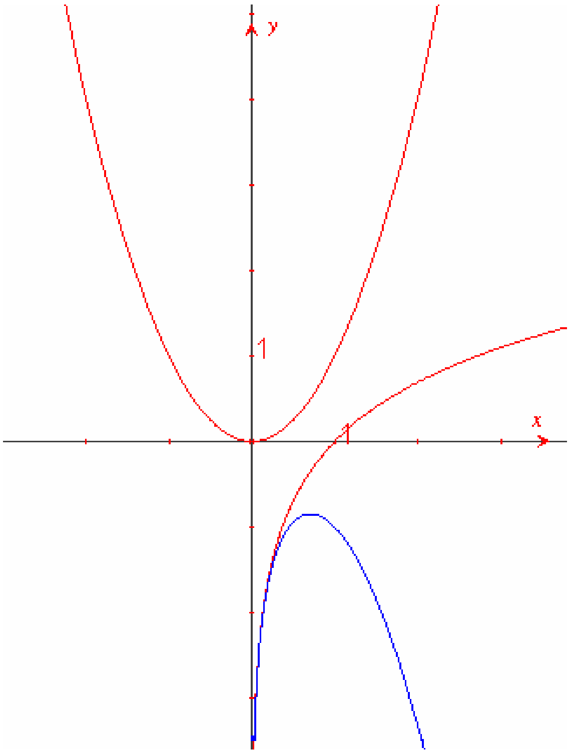

Figura 4