

Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica PNI - 22 giugno 2006
Soluzione del QUESTIONARIO

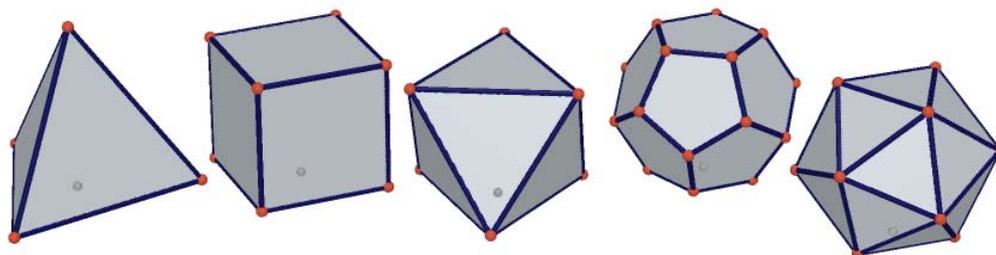
Soluzione a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESITO 2

I poliedri regolari – noti anche come solidi platonici – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Un poliedro si dice regolare se

1. ha come facce poligoni regolari tutti uguali tra loro
2. da ciascun vertice esce lo stesso numero di spigoli.



Per dimostrare che esistono solo cinque tipi di poliedri regolari occorre osservare che in ogni vertice convergono degli angoli che formano un angoloide. Ad esempio in ogni vertice del cubo, convergono tre angoli retti, che formano le facce di un angoloide (un triedro in questo caso).

Si può dimostrare il seguente teorema:

la somma degli angoli che formano le facce di un angoloide è minore di un angolo giro.

Osserviamo innanzitutto che ad ogni vertice concorrono almeno 3 facce, inoltre che la somma delle ampiezze degli angoli che concorrono in quel vertice deve essere $< 360^\circ$. Dimostriamo il teorema per parti, aumentando via via il numero dei lati delle facce. Indichiamo con la coppia ordinata (p,q) un poliedro avente $p =$ numero lati di ogni faccia e $q =$ numero lati per vertice.

a) Vi sono solo tre tipi di poliedri regolari aventi come facce triangoli equilateri.

Infatti: Quanti poliedri esistono aventi come facce dei triangoli equilateri?

- | | |
|--------------------------------|--|
| $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ | \rightarrow tetraedro $(3,3)$ |
| $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$ | \rightarrow ottaedro $(3,4)$ |
| $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ | \rightarrow icosaedro $(3,5)$ |
| $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ | \rightarrow impossibile perché angolo giro |

b) Vi è un solo tipo di poliedro regolare avente come facce poligoni regolari con quattro lati, cioè quadrati.

Infatti: Quanti poliedri esistono aventi come facce dei quadrati?

- | | |
|--------------------------------|--|
| $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ | \rightarrow cubo $(4,3)$ |
| $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ | \rightarrow impossibile perché angolo giro |

c) Vi è un solo tipo di poliedro regolare avente come facce poligoni regolari con cinque lati (pentagoni regolari).

Infatti: Quanti poliedri esistono aventi come facce dei pentagoni?

- | | |
|---------------------------------|--|
| $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$ | \rightarrow dodecaedro $(5,3)$ |
| $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$ | \rightarrow impossibile perché maggiore dell'angolo giro |

d) Non esistono poliedri regolari aventi come facce poligoni regolari con 6 lati, cioè esagoni.

Infatti:

- | | |
|---------------------------------|---|
| $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ | \rightarrow impossibile perché angolo giro. |
|---------------------------------|---|