

Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica ordinamento - 22 giugno 2006
Soluzione del PROBLEMA 2
Soluzione a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e .

1. Si discuta, al variare di a , l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette d'equazioni $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Risoluzione del problema 2

La prima funzione è ben nota ed è una delle più importanti della matematica. La seconda formula rappresenta una famiglia di parabole con vertice nell'origine e asse di simmetria l'asse y ; per $a = 0$ si ottiene l'asse delle ascisse.

Punto 1

Al variare di a l'equazione $\log x = ax^2$ rappresenta l'intersezione tra la funzione logaritmo naturale con una parabola, come nella seguente figura 1, dove sono disegnate tre parabole della famiglia.

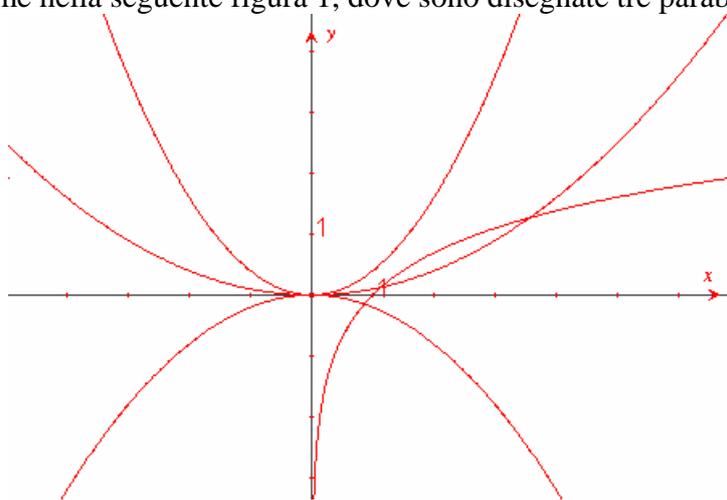


Figura 1

È evidente che al variare del parametro a il numero delle intersezioni può essere due, una o nessuna. Osservando la figura si può già dire che se $a \leq 0$, allora c'è una sola intersezione tra la parabola e la curva logaritmica.

Per trovare il valore di a per cui le due curve sono tangenti tra loro, è sufficiente risolvere il seguente sistema, imponendo che le due curve abbiano la stessa ordinata e, in quel punto, la stessa retta tangente:

$$\begin{cases} \log x = ax^2 \\ \frac{1}{x} = 2ax \end{cases}$$

Si ottiene come soluzione che il parametro deve valere $a = \frac{1}{2e}$.

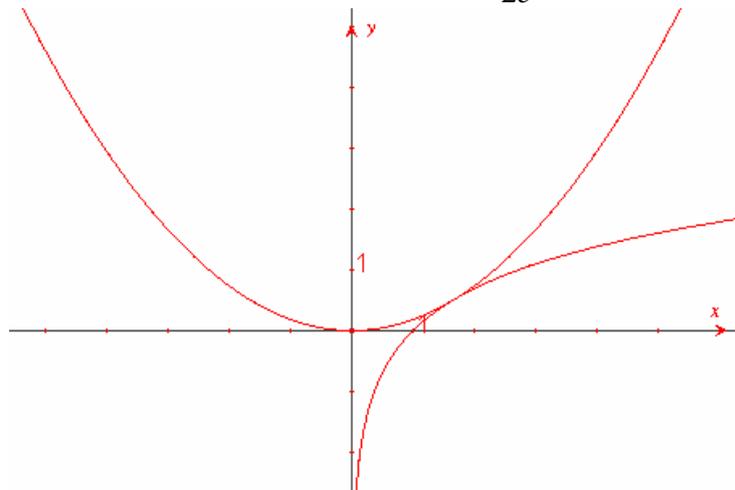


Figura 2

Punto 2

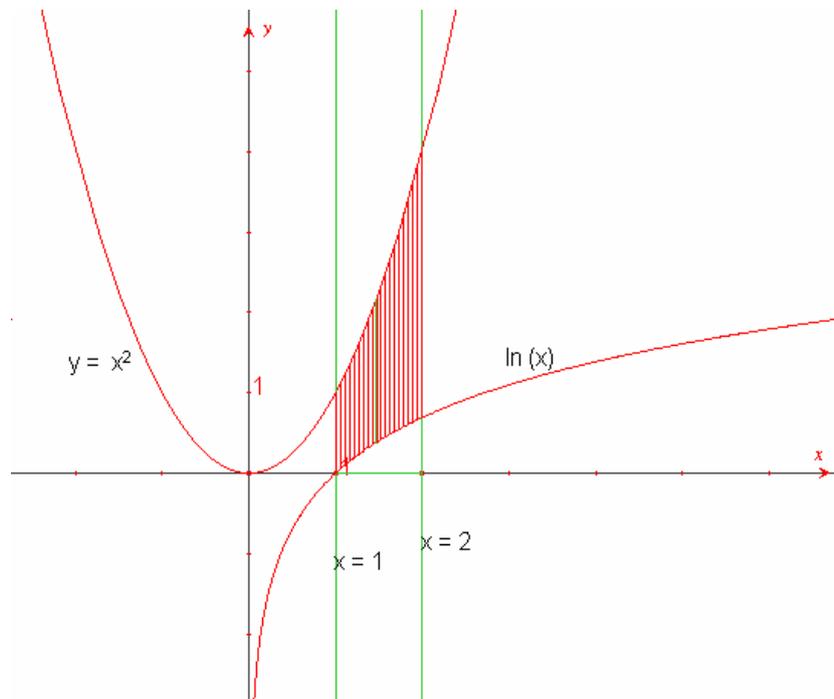


Figura 3

Le funzioni diventano $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^2$. L'area è data da:

$$S = \int_1^2 (x^2 - \ln x) \cdot dx .$$

Occorre prima eseguire, per parti, il seguente integrale:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

Il risultato che si ottiene è

$$S = \frac{10}{3} - 2 \ln 2 \approx 1,947 .$$

Punto 3

Se si assegna ad a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$, si ottiene una funzione che esiste per $x > 0$ ed è sempre negativa, perché $\ln x > ax^2$ (per ogni $x > 0$). Se ad esempio scegliamo $a = 1$ otteniamo la funzione $h(x) = \ln x - x^2$, che ha l'andamento indicato nella figura 4. Ricavando la derivata prima si ottiene: $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$. La $f(x)$ funzione ha quindi un massimo in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ha per asintoto l'asse y e volge la concavità verso il basso, perché $f''(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + 2\right)$, che è negativa per ogni $x > 0$.

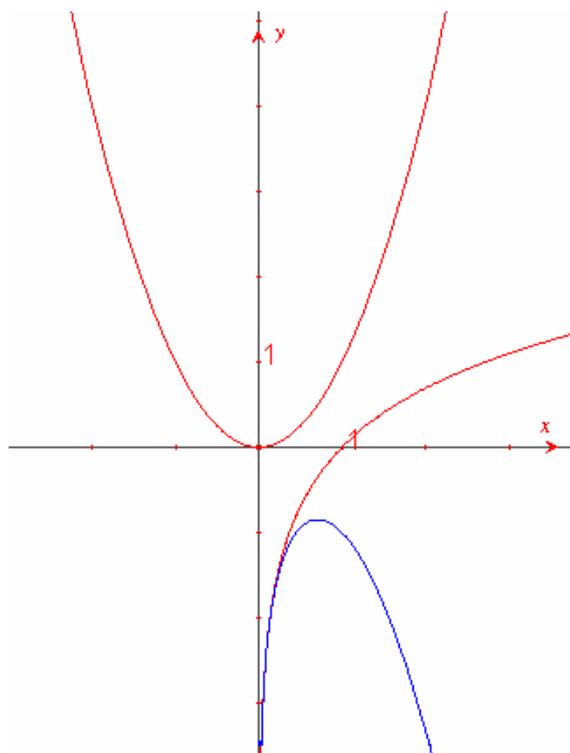


Figura 4