Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica di ordinamento - 21 giugno 2007
Soluzione del QUESTIONARIO
a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESITO 9

Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

L'integrale indefinito assegnato si risolve per sostituzione, una sostituzione di tipo trigonometrico; la sostituzione è suggerita dalla seguente figura.

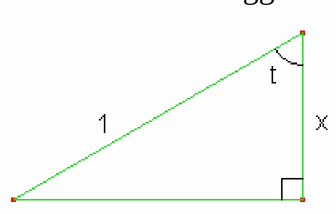

Figura 1

Si pone $x = \cos t$ e si ricava $dx = -\sin t \cdot dt$. Quindi $t = \arccos x$
Sostituendo nell'integrale $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ si ha

$$\int \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)dt = = -\int \sin^2 t\,dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c.$$

Quindi tornando alla variabile x si ha:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

In definitiva si ha

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\arccos 0) = \frac{\pi}{4}.$$

L'integrale corrisponde a un quarto dell'area del cerchio unitario: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.