Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 21 giugno 2007
Soluzione del PROBLEMA 1
a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{f(x)}dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

Risoluzione del problema 1
Punto 1)
La funzione, per ogni numero *a* positivo e diverso da 1, è una funzione pari ed è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. Il minimo relativo (e assoluto) si ha per $x = 0$. Il minimo vale $g(0) = 2$. Per dimostrarlo si può ricorrere allo studio della derivata prima della funzione

$$g'(x) = a^x \ln a - a^{-x} \ln a = \left(a^x - a^{-x}\right) \cdot \ln a$$

ma anche a una semplice somma di due grafici.

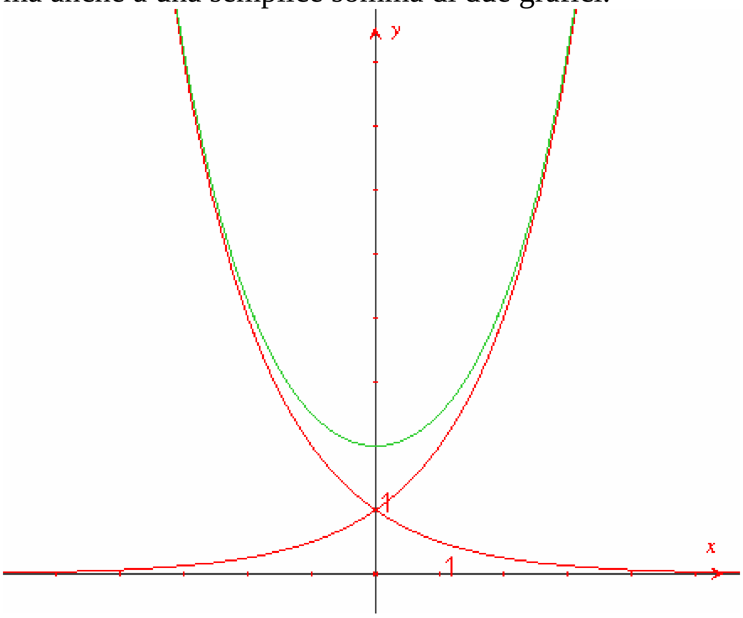

Figura 1

Punto 2)

Se si pone $a = e$ si ottiene la funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$, che è ovviamente il doppio della funzione coseno iperbolico; quindi $f(x) = e^x + e^{-x} = 2\cosh x$, il cui grafico è indicato in figura

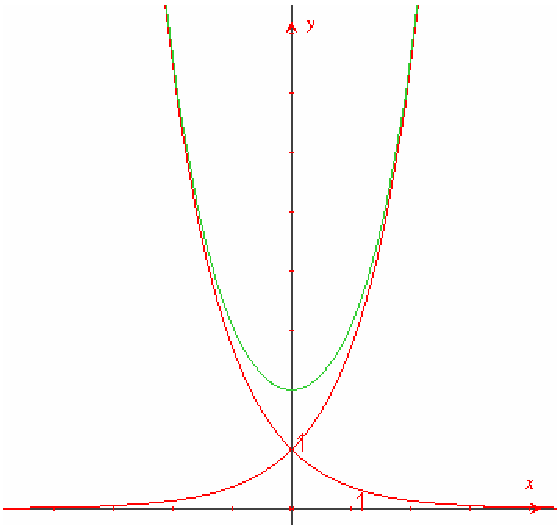

Figura 2

Il grafico di $\frac{1}{f(x)}$ si può facilmente tracciare per via grafica (figura 3).

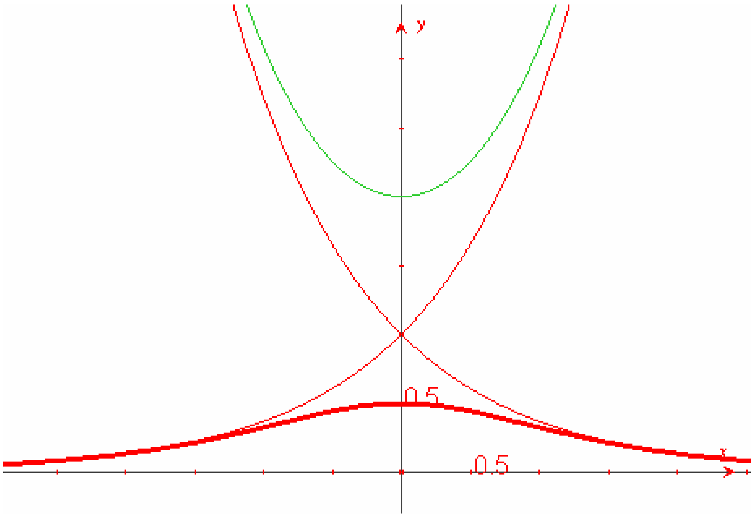

Figura 3

Punto 3)
L'integrale

$$\int_0^t \frac{1}{f(x)}\, dx$$

si può scrivere

$$\int_0^t \frac{1}{2\cosh x}\, dx .$$

Calcoliamo inizialmente l'integrale indefinito (per sostituzione, ponendo $t = e^x$):

$$\int \frac{1}{2\cosh x}\, dx = \arctan\left(e^x\right) + c .$$

Tornando all'integrale definito si ottiene:

$$\int_0^t \frac{1}{2\cosh x}\, dx = \arctan(e^t) - \frac{\pi}{4} .$$

Punto 4)
Passando al limite richiesto dal testo si ha:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\arctan(e^t)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Per calcolare un valore approssimato di $\frac{\pi}{4}$, ci sono varie procedure. Forse la più semplice è quella di calcolare un valore approssimato dell'area di un quarto del cerchio unitario usando il metodo dei trapezi. L'integrale da approssimare diventa il seguente:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

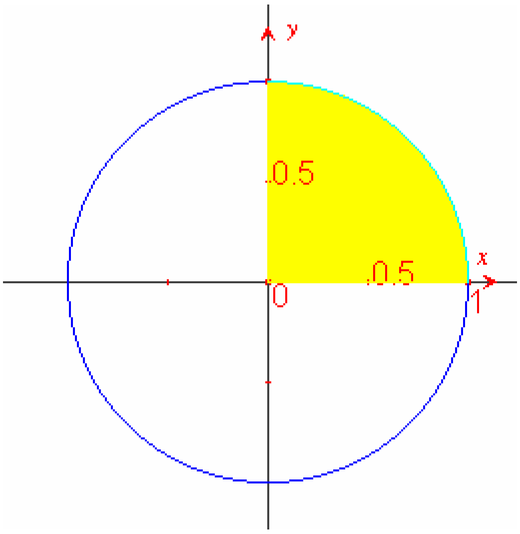

Figura 4