Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 21 giugno 2007
Soluzione del PROBLEMA 2
a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Risoluzione del problema 2

Punto 1)
Consideriamo il punto A coincidente con l'origine degli assi cartesiani e il punto B di coordinate (1;0). Facciamo passare per il punto A una semiretta r. Costruiamo l'asse a del segmento AB. Questo interseca la retta r nel punto D. Disegniamo la bisettrice b' dell'angolo formato dalla semiretta r con il semiasse positivo delle *x*. Intersechiamo b con r; si ottiene il punto C (figura 1).

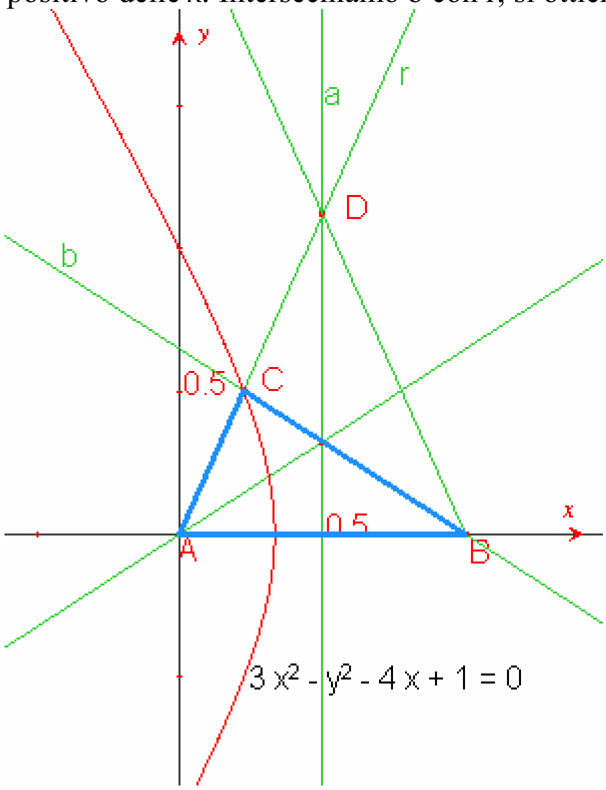

Figura1

Punto 2)
Al variare della semiretta r attorno all'origine degli assi, il punto C descrive un luogo geometrico γ di cui si vuole trovare l'equazione.

Se indichiamo con $2t$ l'angolo BAC, l'equazione della retta r è data da
$y = (\tan 2t)x$.
La retta b ha equazione:
$y = (\tan(\pi - t))(x-1)$.
Intersecando queste due rette si ottiene il punto C:

$$\begin{cases} y = (\tan 2t)x \\ y = (-\tan t)(x-1) \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}x \\ \tan t = \dfrac{y}{1-x} \end{cases}$$

Sostituendo $\tan t = \dfrac{y}{1-x}$ nella prima equazione, dopo alcuni calcoli, si elimina il parametro t tra le due equazioni e si ottiene che il luogo geometrico γ ha per equazione cartesiana:

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

Di questa iperbole si deve considerare solo il ramo "di sinistra", ossia quello che giace nel semipiano definito da $x \le \dfrac{1}{3}$,
Si tratta quindi di un'iperbole traslata che si può scrivere in forma canonica:

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

Ponendo $\begin{cases} X = x - \dfrac{2}{3} \\ Y = y \end{cases}$ (traslazione degli assi) si ha

$$\frac{X^2}{\frac{1}{9}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

Con centro di simmetria nel punto $O'\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ e asintoti le rette di equazioni $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$.

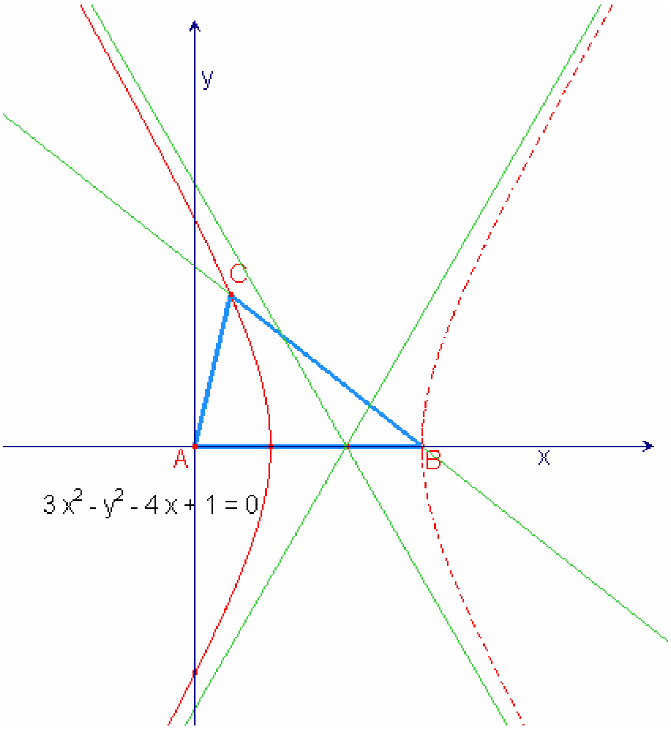

Figura 2

<u>Soluzione alternativa dei primi due punti del problema</u>

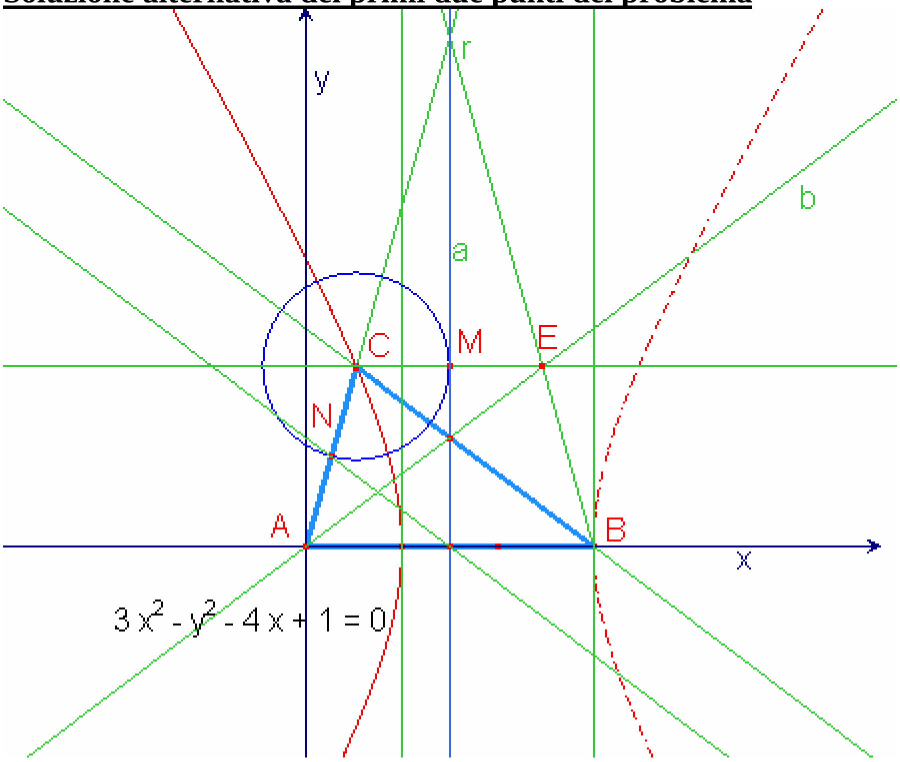

Figura 3

Si consideri il trapezio isoscele ABEC (figura 3). In questo trapezio la base CE è uguale al lato AC (e quindi anche al lato BE). Infatti è facile dimostrare che il triangolo AEC è isoscele perché l'angolo CAE è uguale all'angolo CEA (che a sua volta è uguale all'angolo EAB).
Essendo M il punto medio di CE, ne consegue che CM è sempre la metà del segmento AC.

Consideriamo ora la retta a (asse del segmento AB) come *direttrice* e il punto A come *fuoco*.
Possiamo pensare al luogo geometrico γ come luogo dei punti C tali che

$$\frac{CA}{CM} = 2.$$

Il luogo γ è quindi una parte di iperbole di eccentricità 2 che ha un fuoco F nel punto A e una direttrice coincidente con la retta a avente per equazione $x = \frac{1}{2}$.

Considerando il punto A come origine degli assi e l'asse positivo delle x coincidente con AB, si ottiene:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\frac{1}{2} - x} = 2.$$

Quadrando si ottiene:

$$\frac{x^2 + y^2}{\frac{1}{4} - x + x^2} = 4$$

da cui si ottiene l'equazione del luogo:

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

Di questa iperbole si deve considerare solo il ramo "di sinistra", ossia quello che giace nel semipiano definito da $x \le \frac{1}{3}$,

Punto 3)
Disegniamo le altezze relative ai lati AC e BC come richiesto.

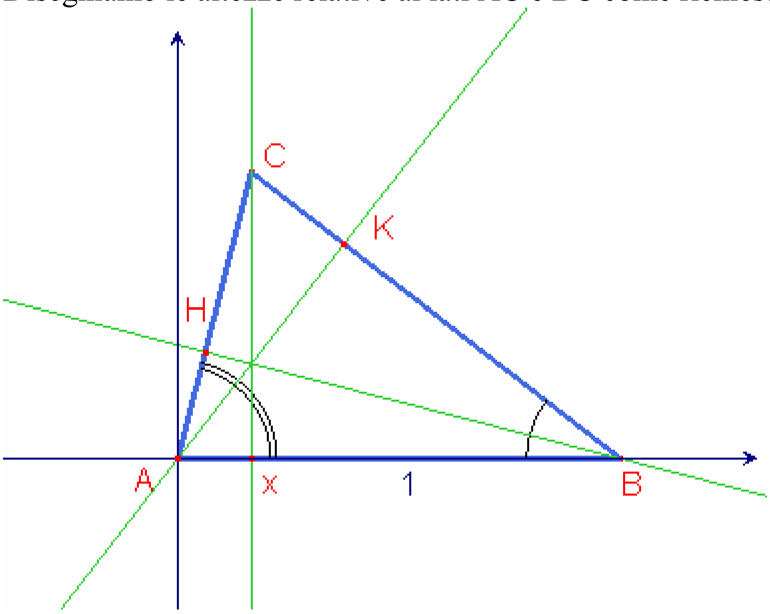

Figura 4

Ragionando sui triangoli rettangoli ABK e ABH, si ha $\overline{AK} = \sin t$ e $\overline{AH} = \sin 2t$.
Nel triangolo ABC deve essere $t + 2t < \pi$.

Si ricava pertanto che $0 < t < \frac{\pi}{3}$.

La funzione si cui viene chiesto il massimo è la seguente:

$$s(t) = \sin^2 t + \sin^2(2t).$$

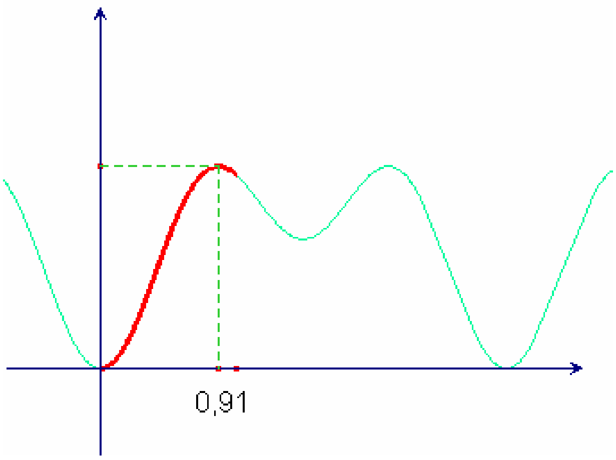

Figura 5

Studiando il segno della derivata prima
$s'(t) = 2\sin(4t) + \sin(2t)$

si ottiene che il massimo si ha per $t = \arcsin\sqrt{\frac{5}{8}}$.

Usando la calcolatrice, si ottiene $t = 0{,}9117...$ rad=52° 14'… .

Punto 4)
Se l'angolo ABC=36°, allora l'angolo in A vale 72° e l'angolo in C vale 72°. Quindi il triangolo è isoscele.

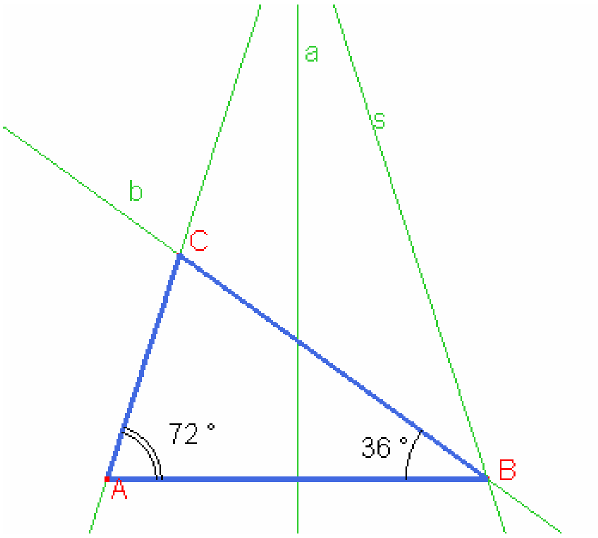

Figura 6

Questo triangolo isoscele si ritrova nella costruzione geometrica del decagono regolare inscritto in una circonferenza (il lato è la sezione aurea del raggio). Quindi AC è la sezione aurea di AB, ossia vale la seguente relazione:

$$\overline{AC} = \overline{AB}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Postscriptum
[Nota: *Questa parte è stata aggiunta dopo, non il giorno stesso della risoluzione del problema. Questa aggiunta si riferisce a uno dei problemi classici dei Greci, ossia alla trisezione di un angolo. In genere questo approfondimento non poteva essere conosciuto da un allievo perché non c'è scritto nei programmi che si debba presentare questo problema con il metodo proposto qui di seguito.* (L.T.)]

Questo problema assegnato all'esame di Stato è strettamente collegato con una delle soluzioni date da Pappo di Alessandria (circa 290-350 d.C.) per la trisezione di un angolo (nelle *Collezioni matematiche,* libro IV).
L'iperbole che si ritrova è quindi la stessa proposta da Pappo (stessa eccentricità).
Usiamo le stesse lettere delle figure precedenti.
Sia dato un angolo AOD che vogliamo trisecare, cioè dividere in tre parti uguali.
L'angolo viene collocato in un cerchio con centro O; disegnare la retta OD e il simmetrico B di A rispetto alla retta OD.
Tracciare l'iperbole di eccentricità 2, avente il punto A come fuoco e la retta OD come una sua direttrice.

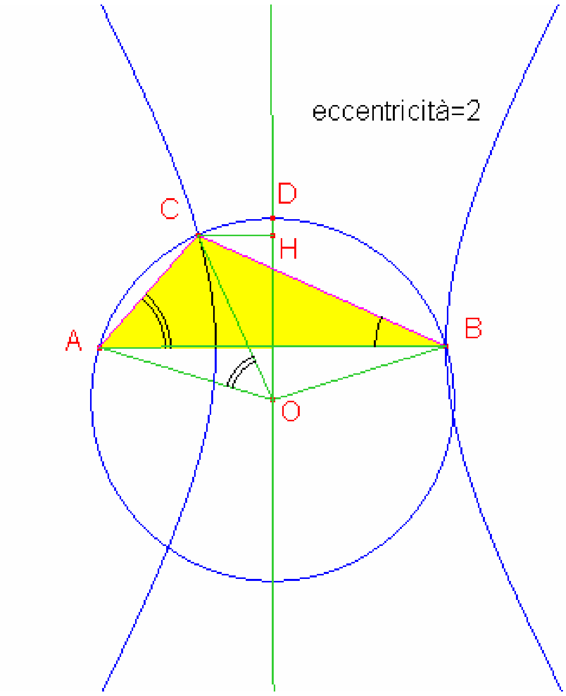

Figura 7

Allora un ramo di questa iperbole interseca la circonferenza in un punto C (diverso da A e da B) in modo che la semiretta OC triseca l'angolo dato, ossia l'angolo COD è un terzo di AOD (figura 7).
Nella figura è immediato osservare che l'angolo ABC è la metà dell'angolo AOC. Verificare (figura 7) che l'angolo AOC è uguale all'angolo BAC.
Se si assume il punto A (un fuoco dell'iperbole) come origine degli assi e il punto B con le coordinate (1;0), allora la direttrice OD ha equazione $x = 1/2$ e l'iperbole ha l'equazione trovata inizialmente.

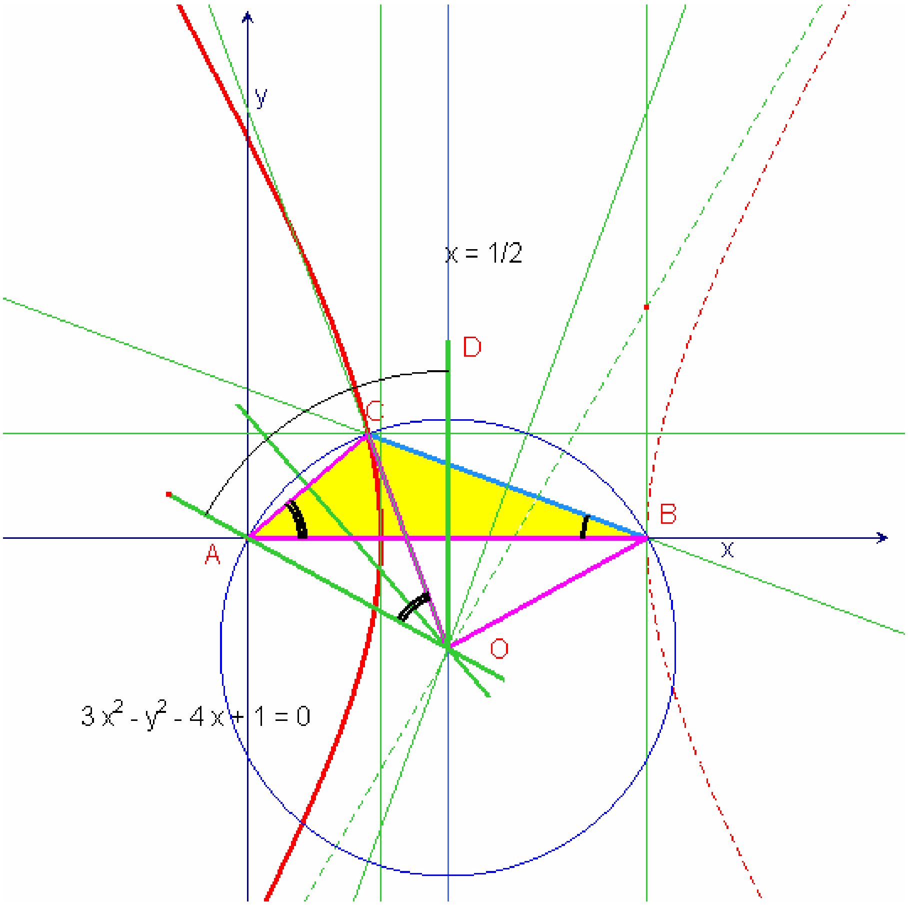

Figura 8