

Esame di Stato Liceo Scientifico

Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 21 giugno 2007

Soluzione del QUESTIONARIO

a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESITO 2

La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x , con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2} .

Consideriamo un punto x compreso tra 1 e e . Costruiamo un rettangolo di base $b = \ln x$.

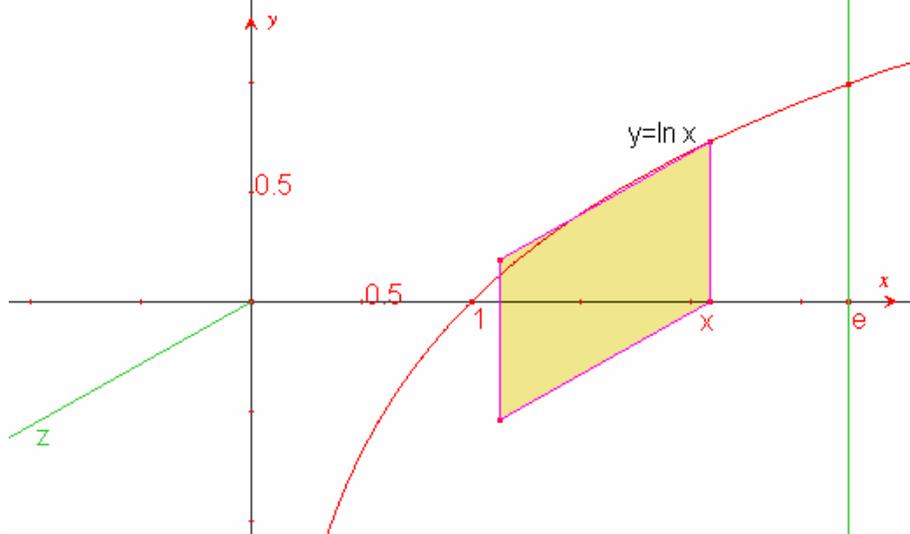


Figura 1

L'altezza del rettangolo (parallela all'asse z , vedi figura 1) sarà pertanto data da $h = 3 \ln x$. La superficie del rettangolo è quindi data da $S(x) = 3(\ln x)^2$.

Il solido è quello rappresentato in figura 2.

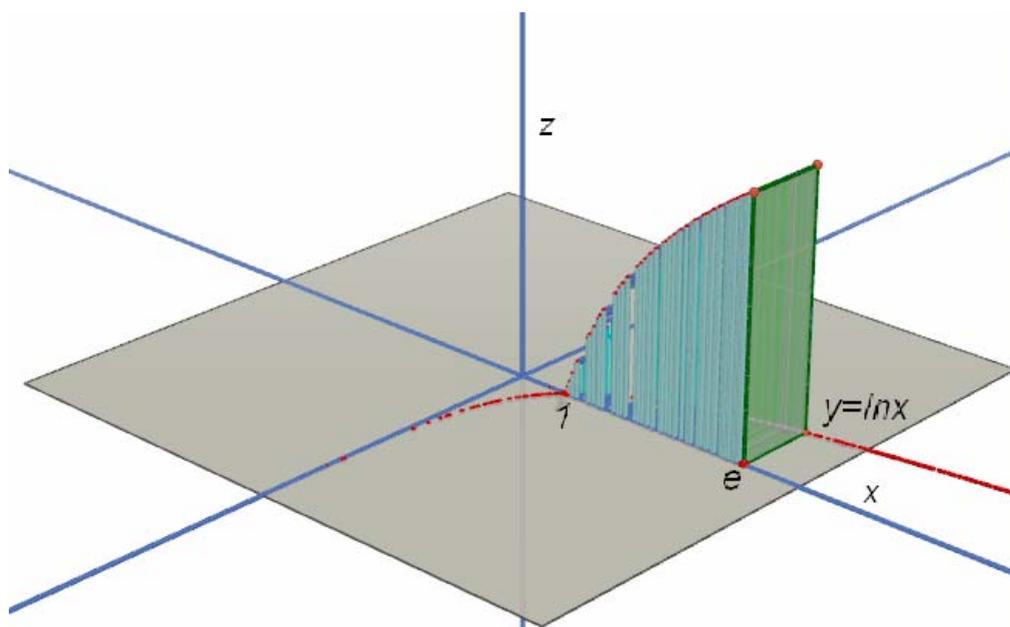


Figura 2

Per determinare il suo volume, si deve pensare di far variare x . Il solido viene descritto dal rettangolo variabile. Il suo volume si ottiene calcolando il seguente integrale definito:

$$V = \int_1^e S(x) dx = \int_1^e 3(\ln x)^2 dx = 3 \int_1^e (\ln x)^2 dx.$$

Calcolando prima l'integrale indefinito, si ottiene (sostituzione, ponendo $t = \ln x$, e poi per parti):

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$$

Quindi:

$$V = 3 \int_1^e (\ln x)^2 dx = 3 \left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = 3(e - 2) = 2,15...$$