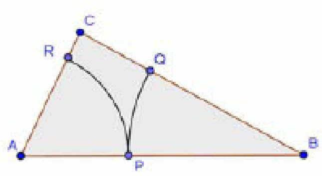
Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 19 giugno 2008
Soluzione del PROBLEMA 1

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

Risoluzione

Punto a)
Siano *AB*=*a*, *PB*=*x*.

x è minimo quando R coincide con C, ossia $AP = AC = \frac{a}{2}$, e quindi anche $x = \frac{a}{2}$.

x è massimo quando Q coincide con C, per cui $BP = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

pertanto $\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Punto b)
L'area del quadrilatero mistilineo PQRC si ottiene per differenza tra l'area del triangolo ABC e quella dei settori circolari APR e PQB.

Area (ABC) $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Area settore (APR)$= \frac{\pi(a-x)^2}{6}$

Area settore (BQP)$= \frac{\pi x^2}{12}$

Area (PQCR)=S(x)$= \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi(a-x)^2}{6} - \frac{\pi x^2}{12} = -\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi}{3}ax + a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right)$

con $\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

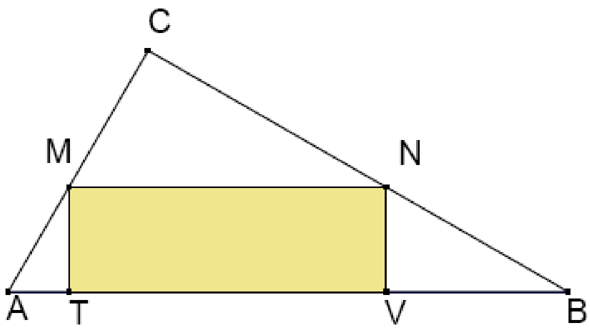
Si tratta di una parabola che volge la concavità verso il basso. La funzione assume valore massimo in corrispondenza del vertice, $x_{\max} = \frac{2}{3}a$ ed è $S_{\max} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{18}\right)$.

Per il minimo è necessario confrontare il valore di S(x) agli estremi.

$S\left(\frac{a}{2}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}\right)$, mentre $S\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{17}{48}\right)\right)$.

Il valore minimo si ha per $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

<u>Punto c)</u>



Si ponga AT = x, con $0 < x < \frac{a}{4}$.

Allora MT = NV = $x\sqrt{3}$, NB = $2x\sqrt{3}$, VB = $3x$, TV = $a - 4x$.

Area(TVNM) = $x\sqrt{3} \cdot (a - 4x) = ax\sqrt{3} - 4x^2\sqrt{3}$.

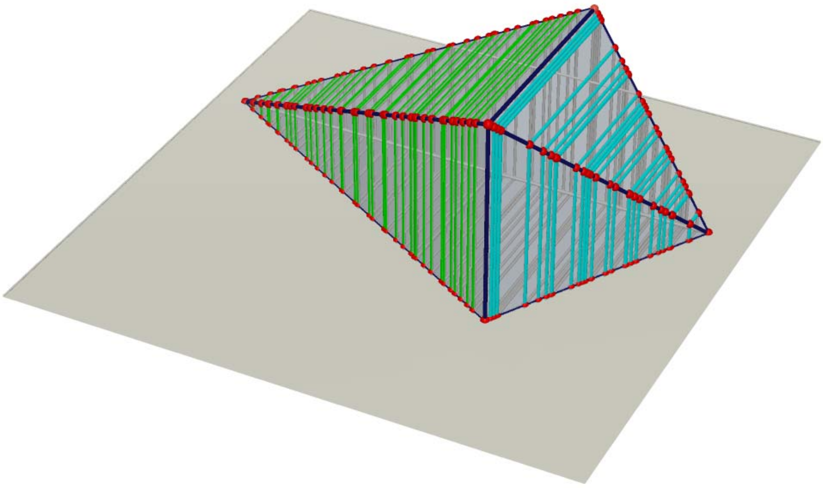
Come al punto precedente si tratta di una parabola e il massimo si trova in corrispondenza del vertice, con $x_{\max} = \frac{a}{8}$. L'area del rettangolo vale $\frac{a^2}{16}\sqrt{3}$.

<u>Punto d)</u>

Il volume del solido W si può calcolare con il metodo "delle fette", che equivale al principio di Cavalieri. Il lato del quadrato sezione varia, a seconda che la sezione intersechi il lato AC o il lato BC. Chiamata x la distanza del piano sezione dal vertice A e t la distanza dal vertice B, il volume del solido sarà quindi:

$$\int_0^{\frac{a}{4}} 3x^2 dx + \int_0^{\frac{3a}{4}} \frac{t^2}{3} dt = \left[x^3\right]_0^{\frac{a}{4}} + \left[\frac{t^3}{9}\right]_0^{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{16}a^3 .$$

In alternativa si può osservare che il solido in questione è costituito da due piramidi aventi in comune la base, che è un quadrato avente per lato l'altezza del triangolo ABC relativa all'ipotenusa, che vale $\frac{a}{4}\sqrt{3}$. La somma delle altezze delle piramidi è AB=a.



Il volume pertanto vale $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{16}$.