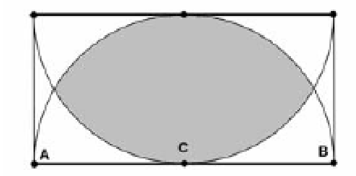
Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 19 giugno 2008
Soluzione del PROBLEMA 2

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2 , si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$

d) Si studi *f(x)* e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

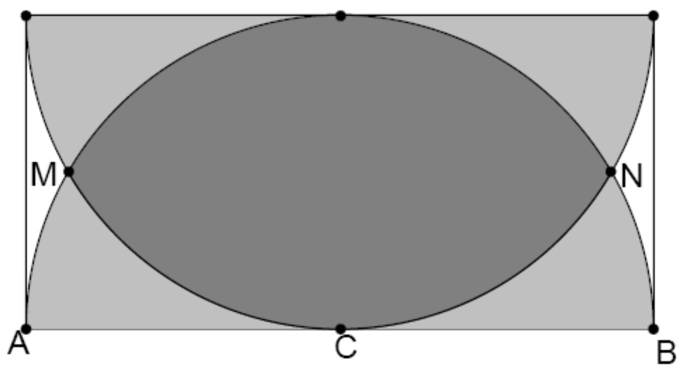


Figura 1

Risoluzione

<u>Punto a)</u>

Con riferimento alla figura 1, l'angolo MCN è di $\dfrac{2\pi}{3}$, pertanto l'area della figura è il doppio dell'area del segmento circolare MNC. L'area cercata è quindi:

$$2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Punto b)

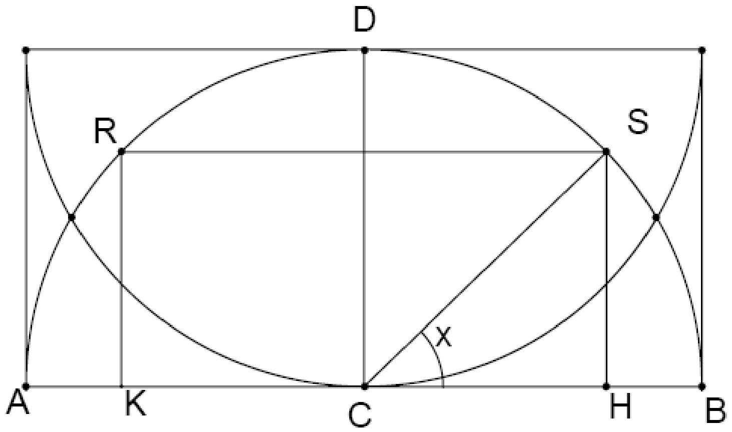


Figura 2

Chiamato x l'angolo HCS, con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ si ha SL = sin$x$, RS =2cos x.

L'area del rettangolo KHSR è $S(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, che nell'intervallo considerato ha un massimo per $x = \frac{\pi}{4}$. Si tratta di un rettangolo che ha la base doppia dell'altezza.

L'area del rettangolo vale 1.

Punto c)

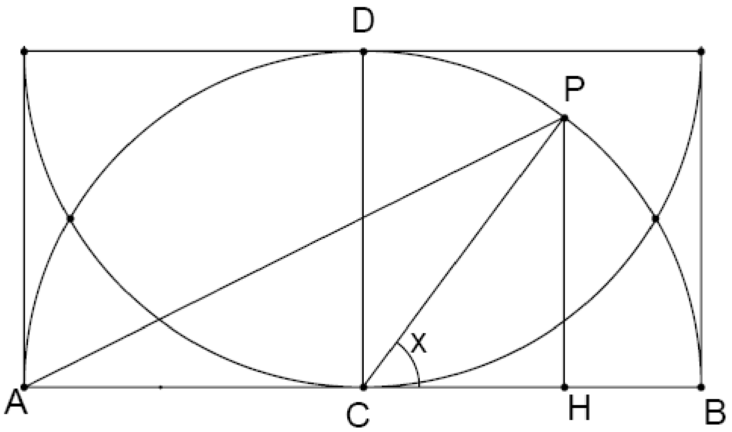


Figura 3

Sia $P\hat{C}H = x$, con $0 \le x \le \pi$; allora:

Area (APH)= $S_1(x) = \frac{AH \cdot PH}{2} = \frac{(1+\cos x)\sin x}{2}$

Area (PCH) = $S_2(x) = \frac{|\cos x| \sin x}{2}$

Perciò $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+\cos x}{|\cos x|}$, dove $0 \le x \le \pi$.

Punto d)

Sia $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{|\cos x|}$. la funzione è pari e periodica di periodo 2π. È definita per $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

è sufficiente studiarla in $[-\pi,\pi]$, anzi in $[0,\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{\cos x} & \text{se } 0 \le \mathrm{x} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1+\cos x}{-\cos x} & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < 0 \le \pi \end{cases}$$

La funzione assume valore positivo per ogni valore di *x* e nell'intervallo analizzato si annulla solo se *x*=π.

Si ha $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$.

In $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ si ha $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ e $f''(x)=\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$, pertanto la funzione è crescente e volge la concavità verso l'alto.

In $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ si ha $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ e $f''(x)=\dfrac{-1-\sin^2 x}{\cos^3 x}$, pertanto la funzione è decrescente, ma volge ancora la concavità verso l'alto.

Tenendo conto di simmetrie e periodicità, il grafico è quello indicato nella figura 4.

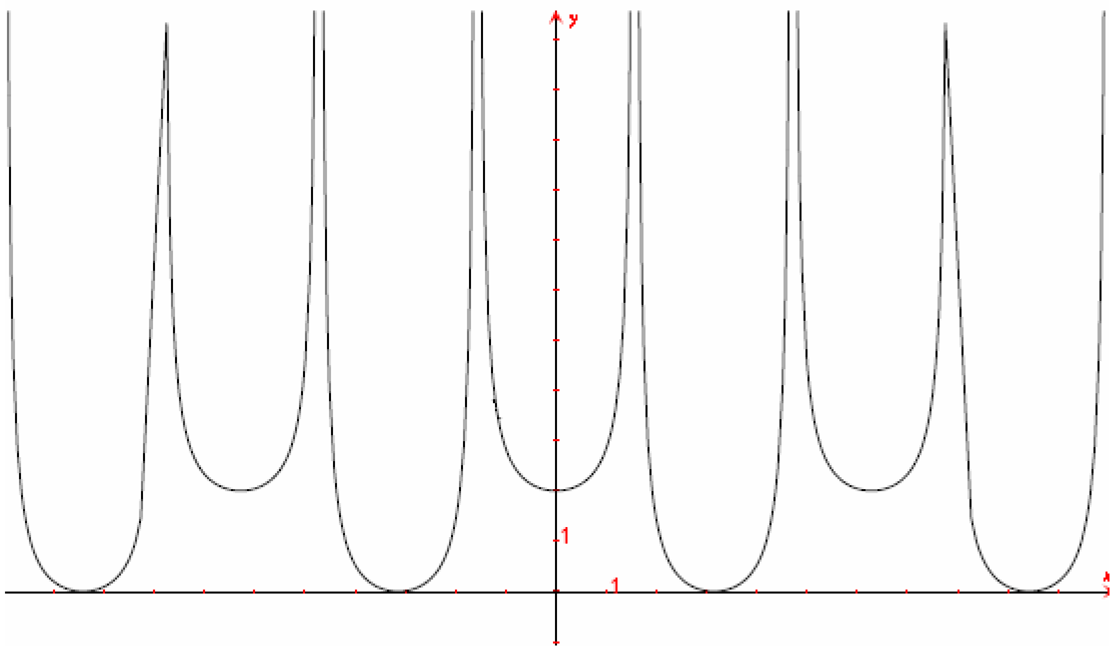


Figura 4