Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 19 giugno 2008

Soluzione del PROBLEMA 2

PROBLEMA 2

Siano *f* e *g* le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x)=2^x$ e $g(x)=x^2$

1. Si traccino i grafici di *f* e di *g* e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x)=2^x-x^2$? Si tracci il grafico di *h*.
4. Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di *h* e l'asse x sull'intervallo [2, 4].

Risoluzione del problema 2

Punto (1)
Tracciando il grafico delle funzioni $f(x)=2^x$ e $g(x)=x^2$ si può osservare che le due curve si intersecano in un punto A del secondo quadrante di ascissa compresa tra -1 e 0.

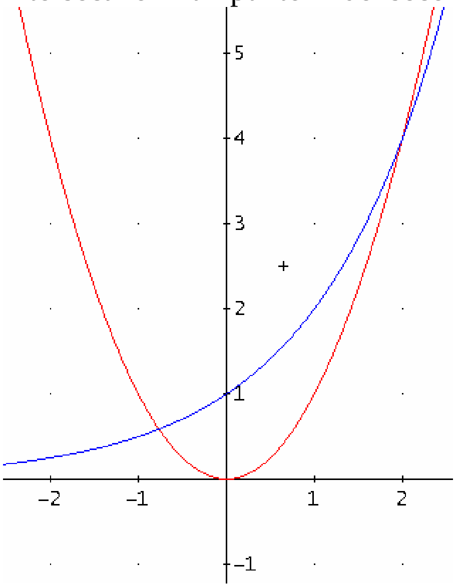

Figura 1

Per dimostrare che esiste tale punto, occorre intersecare i grafici delle due funzioni, oppure considerare la funzione $h(x)=2^x-x^2$, funzione continua, che cambia di segno nell'intervallo chiuso $[-1{,}0]$. Si ha infatti $f(0)=1$ e $f(-1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$. Quindi tra $x=-1$ e $x=0$, c'è almeno una radice reale per la funzione $h(x)$. Nell'intervallo $[-1{,}0]$ tale radice è anzi unica, come si vedrà nello svolgimento dei punti successivi del problema.

Punto (2)
Per determinare l'ascissa del punto *A*, si può procedere con il metodo di bisezione oppure con altri metodi più rapidi. Per usare il metodo delle tangenti di Newton occorre anticipare alcuni elementi dello studio della funzione $h(x)$. Si ricava la $h'(x)=2^x\ln 2-2x$ e la $h''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$. Si

trova che nell'intervallo $[-1{,}0]$, in considerazione del fatto che la $h'(x) > 0$ e la $h''(x) < 0$ per ogni x dell'intervallo $[-1{,}0]$, si può applicare il metodo di Newton.
Poiché nell'intervallo $[-1{,}0]$ la derivata prima è discorde con la derivata seconda, si parte dall'estremo $\alpha = -1$.
La prima iterazione del metodo di Newton fornisce:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{h(\alpha)}{h'(\alpha)} = -1 - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\ln 2}{2} + 2} = -\frac{3 + \ln 2}{4 + \ln 2} \approx -0{,}78692337..$$

Con una seconda iterazione, si ha:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{h(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)} \approx -0{,}76684338..$$

Con una terza iterazione si ha

$$\alpha_3 = -0{,}76666471.$$

quindi, l'approssimazione richiesta è: $x = -0{,}767....$

Punto (3)

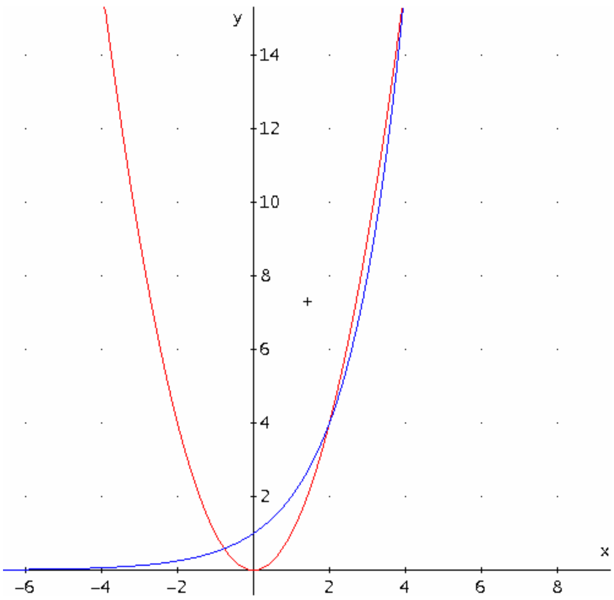

Figura 2

Per determinare il numero degli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$, occorre studiare la funzione. Graficamente si è già visto che $h(x)$ ammette uno zero che ha ascissa negativa (compresa tra -1 e 0). Non è difficile scoprire che $x = 2$ e $x = 4$ sono altri due zeri della funzione. Per dimostrare che non ci sono altre radici della $h(x)$ è necessario ricorrere alla derivata prima e poi alla derivata seconda. La derivata prima è:

$$h'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$$

Lo studio del segno della derivata prima porta a quello di una disequazione che si può risolvere solamente per via grafica ed in modo approssimato:
$h'(x) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad 2^x \ln 2 \geq 2x$.
Occorre quindi confrontare i grafici della funzione $y = 2^x \ln 2$ (funzione ovviamente convessa) e della retta di equazione $y = 2x$. Si ottiene il grafico riportato di seguito (figura 3).

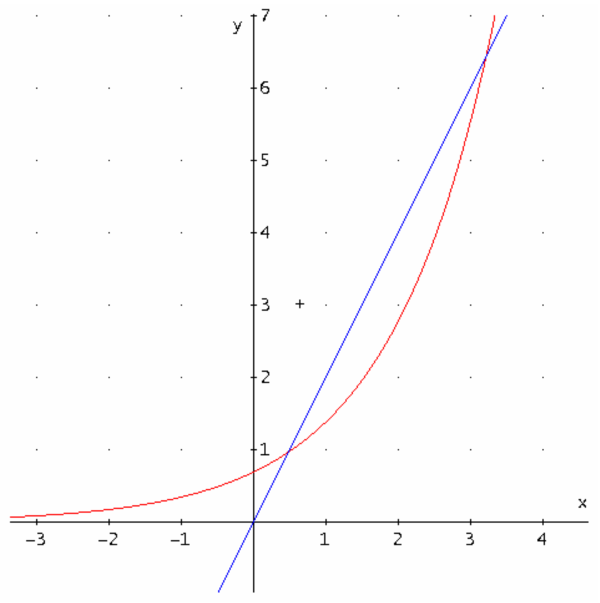

Figura 3

Tale grafico permette di individuare due zeri della derivata prima, $x = \beta$ e $x = \gamma$. In modo numerico si può ricavare che $0 < \beta < 1$ e $3 < \gamma < 4$. Con un metodo numerico si trova $\beta \approx 0{,}48...$ e $\gamma = 3{,}21...$. Quindi $x = \beta$ è un punto di massimo relativo e $x = \gamma$ è un punto di minimo relativo per la funzione.

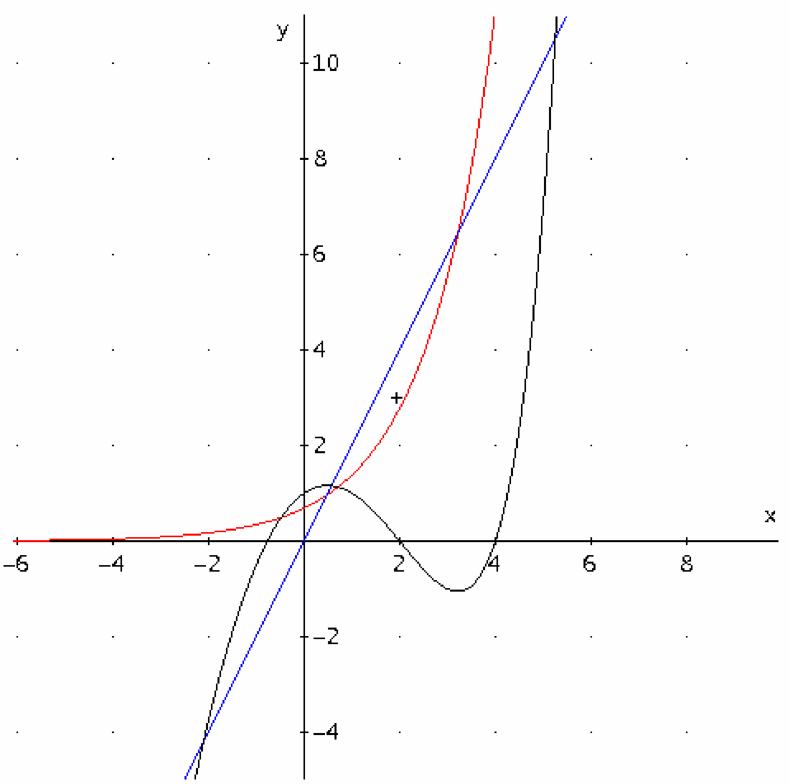

Figura 4

Si può completare lo studio della funzione $h(x)$, verificando che non ammette asintoti.
Si può inoltre studiare la derivata seconda e il suo segno:

$$2^x (\ln 2)^2 - 2 \geq 0$$

che fornisce

$$x \geq 1 - \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2}$$

ovvero, circa

$$x \geq 2{,}06...$$

Per $x = 2{,}06...$ la funzione ammette un punto di flesso ascendente.

Il fatto che esista un solo flesso della $h(x)$ conferma che gli zeri della $h'(x)$ sono soltanto due. Se infatti gli zeri della derivata prima fossero più di due (ad esempio tre), applicando il teorema di Rolle, si scoprirebbe che ci sarebbero almeno due flessi.

Punto (4)

Poiché nell'intervallo richiesto, la funzione non è positiva, l'area richiesta è data dall'opposto dell'integrale definito della funzione tra 2 e 4:

$$S = -\int_2^4 h(x)\,dx = -\int_2^4 \left(2^x - x^2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_2^4 = \frac{56}{3} - \frac{12}{\ln 2} \approx 1{,}3543... \; .$$

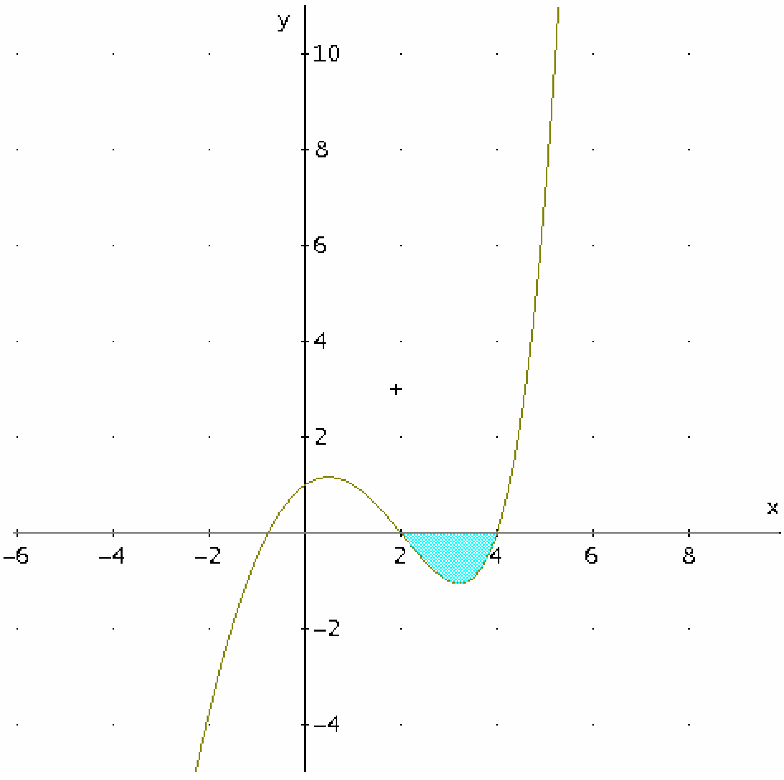

Figura 5