Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 19 giugno 2008
Soluzione del QUESTIONARIO

QUESITO 8

Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

Poiché π^x è una funzione esponenziale (con base maggiore di 1) è definita per ogni *x* reale, mentre x^π è una potenza reale di base reale ed è definita solo se la base è positiva, si ha quindi $x > 0$. Pertanto il dominio di f è appunto $x > 0$. Tuttavia, essendo l'esponente positivo, si può prolungare la funzione per continuità ed accettare nel dominio anche $x = 0$, dove si ha $f(0) = 1$.

Calcoliamo la $f'(x)$. Si ottiene:

$$f'(x) = \pi^x \log\pi - \pi\, x^{\pi-1}$$

e quindi

$$f'(\pi) = \pi^\pi \log\pi - \pi^\pi = \pi^\pi(\log\pi - 1)$$

ed essendo $\log\pi > 1$ poiché

$$\log\pi > \log e = 1$$

essendo $\pi > e$, ne consegue che

$$f'(\pi) > 0.$$

Calcoliamo ora la derivata seconda della funzione:

$$f''(x) = \pi^x \log^2\pi - \pi(\pi-1)x^{\pi-2}$$

e quindi

$$f''(\pi) = \pi^\pi \log^2\pi - \pi(\pi-1)\pi^{\pi-2} = \pi^{\pi-1}(\pi\log^2\pi - \pi + 1) = \pi^{\pi-1}(\pi(\log^2\pi - 1) + 1) > 0$$

poiché $\log^2\pi - 1 > 0$ essendo come detto in precedenza $\log\pi > 1$.
In definitiva, nel punto $x = \pi$ la funzione data è crescente e convessa.

…….

Giudizio:
Livello di difficoltà: medio-alto
E' un quesito in programma.
Normalmente si fa.
E' presente nei libri di testo.
Controlla abilità di calcolo più che delle conoscenze fondamentali.
Ben formulato.