Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 26 giugno 2009
Soluzione del PROBLEMA 2
a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

Tracciamo il grafico G_f della funzione $f(x) = \ln x$ (*logaritmo naturale* di *x*).

Punto 1

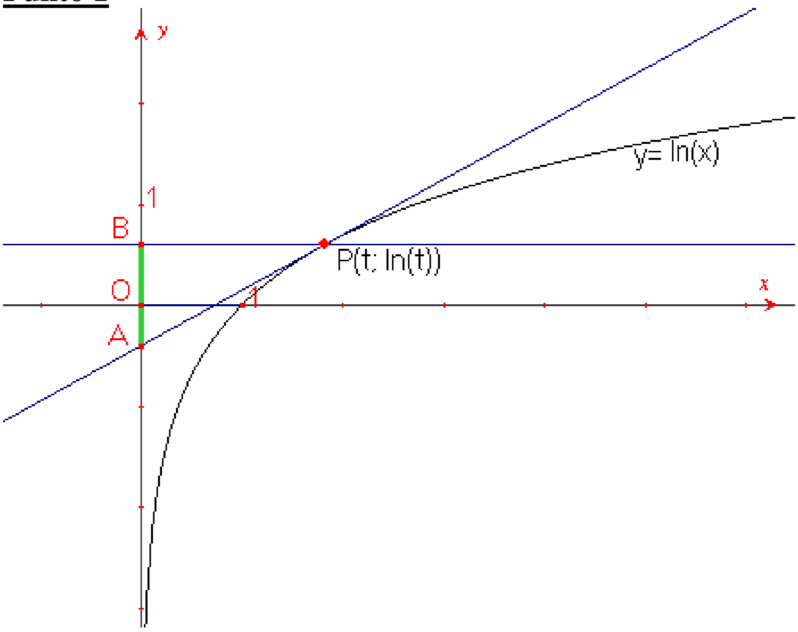

Figura 1

Consideriamo un punto generico $P(t, \ln t)$, appartenente al grafico della funzione; quindi *t* è un numero reale positivo. Poiché $f'(x) = \frac{1}{x}$, il coefficiente angolare della retta tangente nel punto *P* al grafico della funzione $f(x)$ sarà $m = f'(t) = \frac{1}{t}$.

La retta tangente a G_f nel punto *P* avrà per equazione: $y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$.

Intersecando con l'asse *y*, si ottiene il punto $A(0; -1 + \ln t)$.
La retta per *P* parallela all'asse *x* ha per equazione $y = \ln t$.

Intersecando con l'asse y si ottiene il punto $B(0; \ln t)$.
Quindi la misura del segmento AB, sarà data da:
$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\ln t - (\ln t - 1)| = 1$ per ogni t reale positivo.
Quindi nel caso della funzione $f(x) = \ln x$, il segmento AB ha lunghezza costante (vale 1).

Supponiamo ora che la funzione sia $g(x) = \log_a x$. Ci sono due casi, a seconda che $a > 1$ oppure $0 < a < 1$, rappresentati nelle seguenti figure.

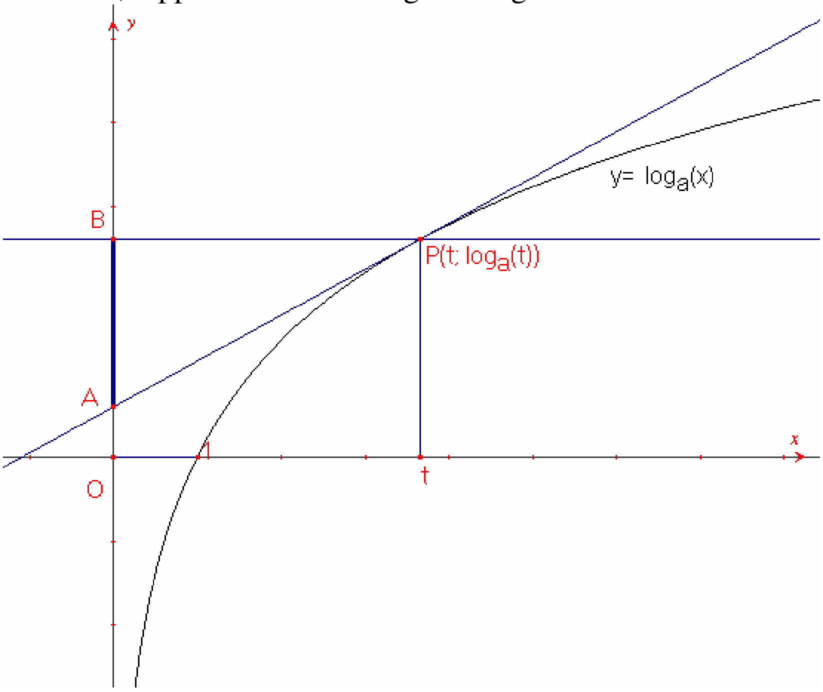

Figura 2

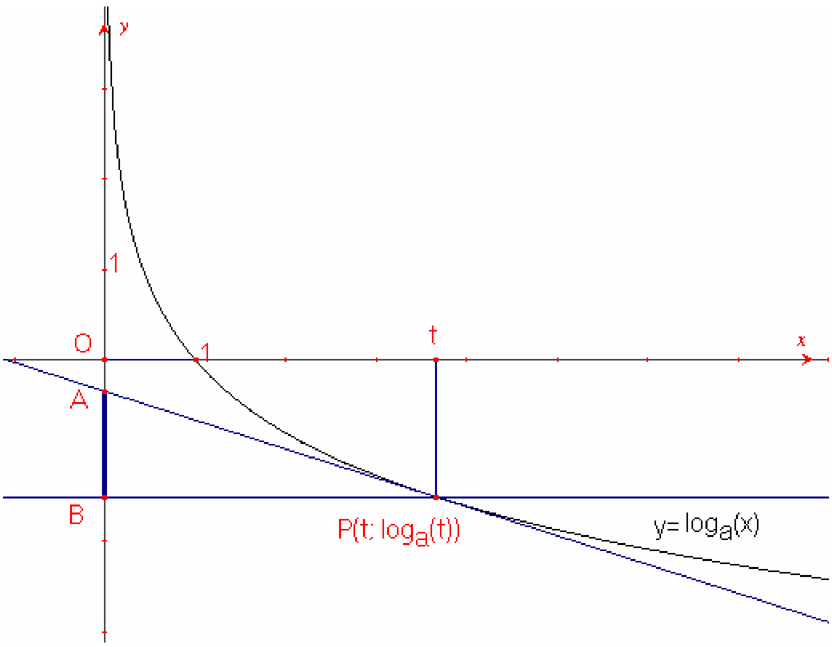

Figura 3

consideriamo il generico punto del grafico G_g. In questo caso si ha: $g'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$. La retta tangente al grafico G_g nel punto $P(t,\log_a t)$ ha coefficiente angolare $g'(t)=\frac{1}{t}\log_a e$. La retta tangente ha quindi equazione $y-\log_a t=\left(\frac{1}{t}\log_a e\right)(x-t)$. Intersecando con l'asse y si ottiene pertanto:

$y=\log_a t-\log_a e$.

Il punto A ha quindi coordinate $A(0;\log_a t-\log_a e)$. Il punto B ha coordinate $B(0;\log_a t)$.

Pertanto il segmento AB misura:

$$\overline{AB}=|y_B-y_A|=|\log_a t-(\log_a t-\log_a e)|=|\log_a e|=\frac{1}{|\ln a|}.$$

La lunghezza del segmento AB è quindi costante per ogni base a dei logaritmi ($a>0$ e $a\neq 1$).

Punto 2

Sia δ l'angolo formato dalla retta tangente al grafico G_g nel suo punto $A(1,0)$ di ascissa 1. Si ha

$$m=g'(1)=\frac{1}{\ln a}=\tan\delta.$$

Se $\delta=45°$, allora $\frac{1}{\ln a}=1$, ovvero $a=e$ e la funzione è $f(x)=\ln x$ (logaritmo naturale).

Se $\delta=135°$, allora $\frac{1}{\ln a}=-1$, ossia $\ln a=-1$. Si ha quindi $a=e^{-1}=\frac{1}{e}$ e la funzione è $g(x)=\log_{\frac{1}{e}} x=\frac{\ln(x)}{-1}=-\ln x$.

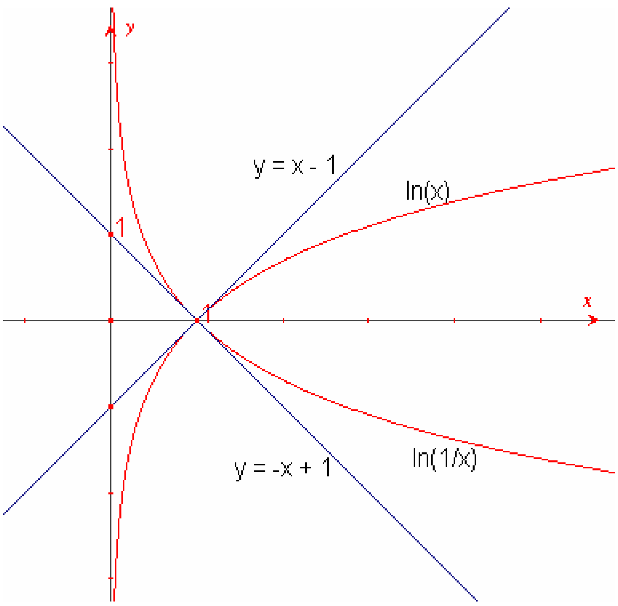

Figura 4

Punto 3

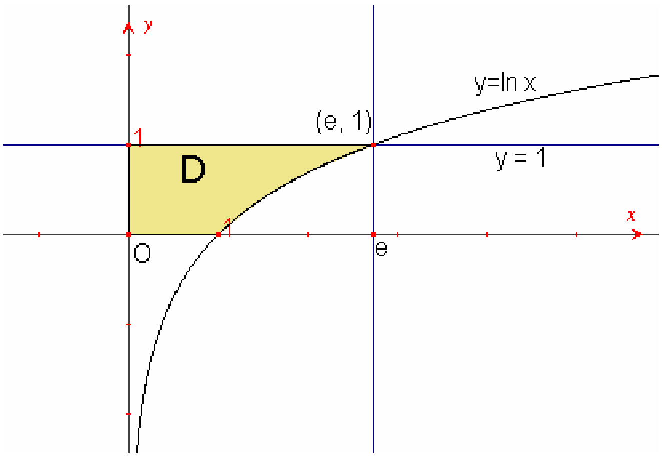

Figura 5

Dalla figura 5 si osserva che basta togliere da un rettangolo di base *e* e altezza 1 l'area del trapezoide *T* formato da logaritmo naturale con lasse *x*. Si ottiene:

$$Area(D) = Area(R) - Area(T) = e - \int_1^e \ln x \, dx = e - [x \ln x - x]_1^e = e - 1 .$$

Un modo più facile di determinare l'area del dominio *D* fa uso di una simmetria della figura rispetto alla bisettrice del I quadrante. Si ottiene la figura 6 seguente.

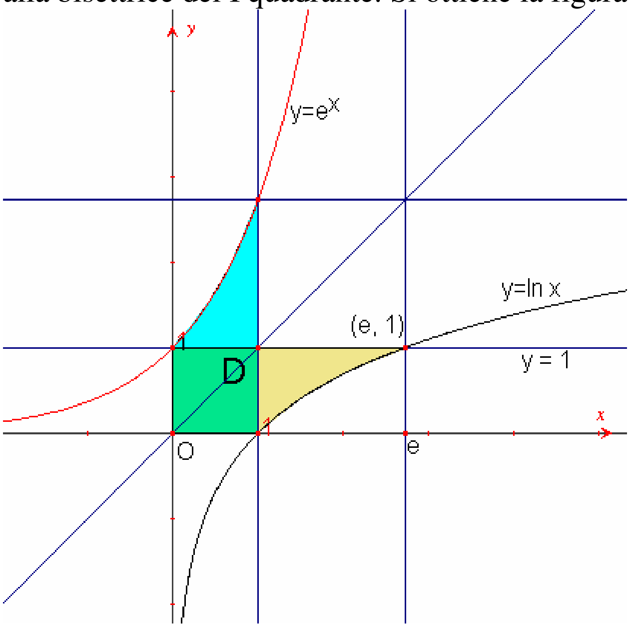

Figura 6

Pertanto l'area del dominio *D'* simmetrico di *D* rispetto alla retta $y = x$, è:

$$Area(D') = Area(D) = \int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1 .$$

Punto 4

Consideriamo come nuovo asse *y* la retta di equazione $x = -1$, operando una traslazione di assi coordinati, in modo che l'origine diventi il punto $O'(-1,0)$. Rispetto a questo nuovo sistema di assi cartesiani, la curva logaritmica assume equazione $y = \ln(x-1)$. La sua funzione inversa avrà per equazione $x = e^y + 1$.

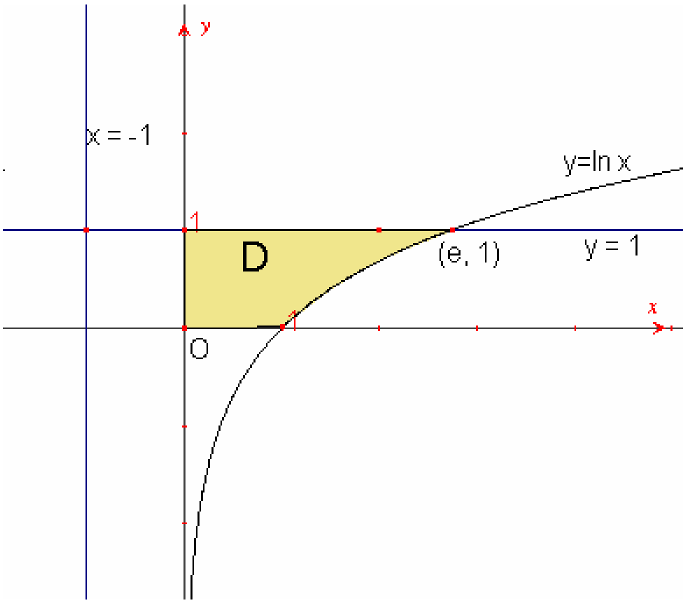

Figura 7

Il volume W si ottiene come differenza tra il volume di un solido di rotazione generato dalla curva $x = e^y + 1$ attorno al nuovo asse y e un cilindro di raggio 1 e altezza 1, che avrà quindi volume π.
Si ottiene pertanto
$V = V_1 - V_2$.

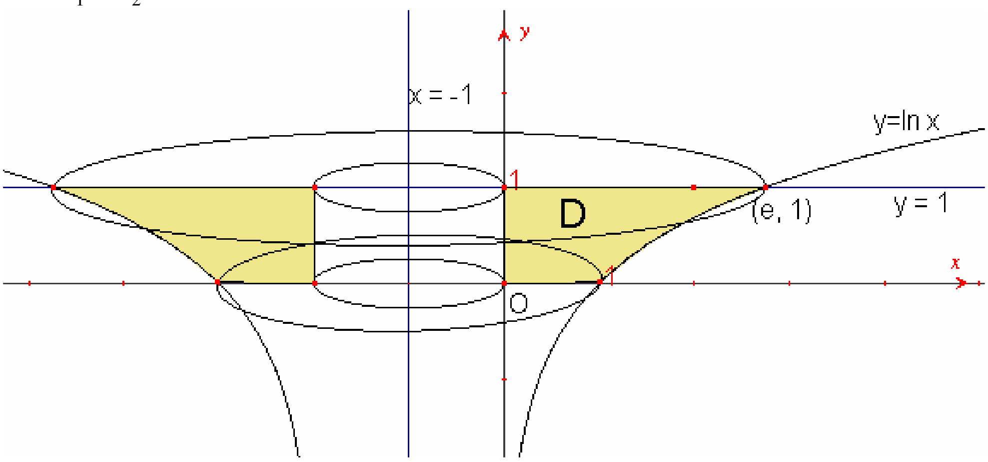

Figura 8

Il volume del solido di rotazione è il seguente:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (e^y + 1)^2 \, dy = \pi \int_0^1 (e^{2y} + 2e^y + 1) dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} + 2e^y + y \right]_0^1$$

da cui si ottiene

$$V_1 = \pi \left[\frac{1}{2} e^2 + 2e + 1 - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right] = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + 2e - \frac{3}{2} \right).$$

Togliendo il volume del cilindro, si ha

$$W = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + 2e - \frac{3}{2} \right) - \pi = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + 2e - \frac{5}{2} \right).$$

Commento

Più difficile e impegnativo nei calcoli rispetto al problema 1.

Punto 1. Richiede una buona conoscenza delle derivate delle funzioni logaritmiche oltre alla capacità di introdurre le coordinate di un punto generico senza usare i nomi soliti delle variabili.

Punto 2. Sostanzialmente indipendente dal punto 1 e fattibile

Punto 3. Il calcolo dell'area richiede di conoscere l'integrazione per parti (questo argomento non è scritto esplicitamente nei programmi del 1945, ancora vigenti, del liceo scientifico)

Punto 4. Questo punto richiede di saper traslare una funzione (argomento non previsto dai programmi), di saper invertire una funzione (argomento non previsto dai programmi) e di saper calcolare il volume di un solido di rotazione attorno all'asse y (argomento non previsto dai programmi ancora vigenti).