Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica - corso di Ordinamento - 26 giugno 2009
Soluzione del QUESTIONARIO (a cura di L. Tomasi e V. Roselli)

QUESITO 6

Si calcoli: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Per risolverlo, conviene raccogliere sotto la radice il termine x^2, ottenendo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Il passaggio più difficile è proprio questo, ovvero scrivere un valore assoluto!

Poiché $x\to-\infty$, non è restrittivo supporre che $x<0$. Si ottiene pertanto che $|x|=-x$.

Sostituendo e semplificando:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1.$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1.$$

Se si tenta di risolvere questo limite con la regola di De L'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

e si ripresenta, inverso, con la stessa forma di indeterminazione. In questo limite la regola di De L'Hospital è inefficace.

Commento

Livello di difficoltà: medio.

E' in programma, ma in modo non chiaro (vedi i programmi del 1945 ancora vigenti).

Normalmente si fa.

E' un argomento presente nei libri di testo.

Controlla conoscenze fondamentali, ma più abilità di calcolo che sostanziali.

Formulato bene.