Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 26 giugno 2009

Soluzione del PROBLEMA 1
a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in R$

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PUNTO 1.
La funzione data ha come dominio l'insieme dei numeri reali ed è derivabile in ogni punto del suo dominio. Fissato un numero naturale positivo n, la derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(-e^{-x}\right)$$

ovvero

$$f'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

Raccogliendo e semplificando, si ottiene:

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

PUNTO 2.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x^n}{n!}e^{-x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0 \quad \left(f(0) = 1\right)$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^n}{n!}e^{-x} > 0 \quad \to \quad x^n < 0 \quad \begin{cases} n \quad PARI & : \text{impossibile} \\ n \quad DISPARI & : x < 0 \end{cases}$$

Riassumendo, se n è pari la funzione è decrescente ed ha un flesso a tangente orizzontale discendente in $x = 0$; se n è dispari la funzione presenta un punto di massimo assoluto in $x = 0$.
Per n dispari dunque $f(x)$ assume il massimo assoluto in M(0; 1), per cui $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.

PUNTO 3.

Sostituendo $n=2$

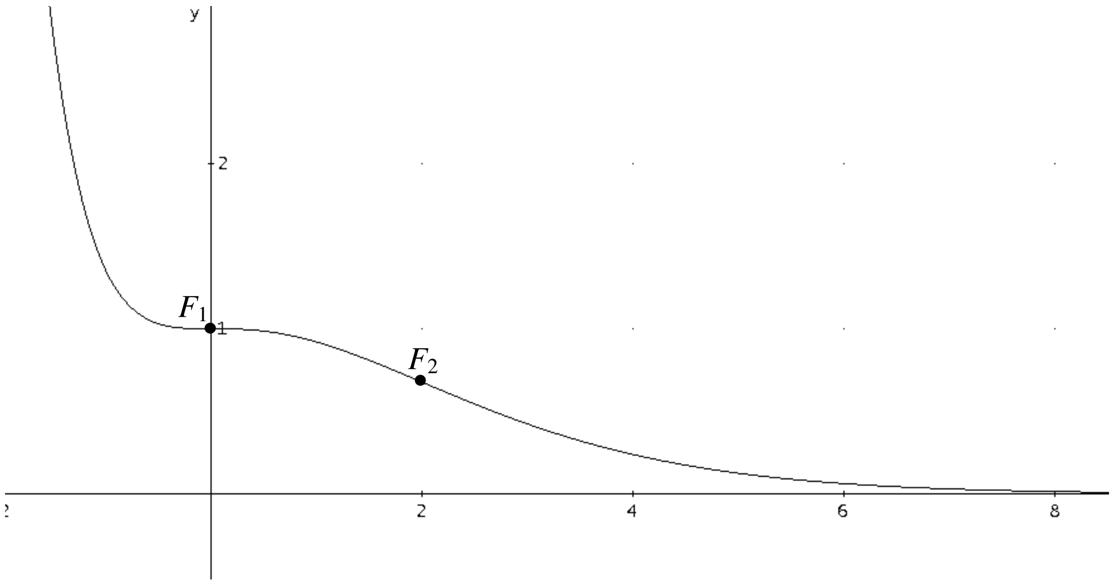
$$n=2 \quad \Rightarrow \quad g(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=+\infty \quad (\text{no asintoto obliquo})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\ F.I.\right]\overset{D.H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\ F.I.\right]\overset{D.H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \quad \to \quad y=0 \quad \text{as. orizzontale}$$

$$g'(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x} \quad \to \quad \text{funzione non crescente con flesso a tangente orizzontale in } (0;1)$$

$$g''(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-x} \quad \to \quad g''(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<0 \vee x>2 \quad \Rightarrow \quad F_1(0;1),\quad F_2\left(2;\frac{5}{e^2}\right)$$



PUNTO 4.

Occorre calcolare il seguente integrale usando (due volte) una integrazione per parti.

$$\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx= \quad \text{per parti}$$

$$\int\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx=-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}+\int(1+x)e^{-x}dx=-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-(1+x)e^{-x}+\int e^{-x}dx=$$

$$=\left(-1-x-\frac{x^2}{2}-1-x-1\right)e^{-x}=\left(-3-2x-\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$$

$$\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx=\left[\left(-3-2x-\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\right]_0^2=(-3-4-2)e^{-2}-(-3)e^0=-9e^{-2}+3=\frac{3e^2-9}{e^2}$$

Commento
Il problema presenta una difficoltà iniziale, perché tratta di una famiglia (in realtà una successione) di funzioni, da studiare tutte assieme. La cosa non è concettualmente facile, anche al PNI.

Punto 1. Relativamente semplice, se si usa l'induzione (tecnica matematica difficile), altrimenti richiede un po' di "occhio clinico" e di abilità . Comunque c'è il risultato di controllo.

Punto 2. Abbastanza facile.

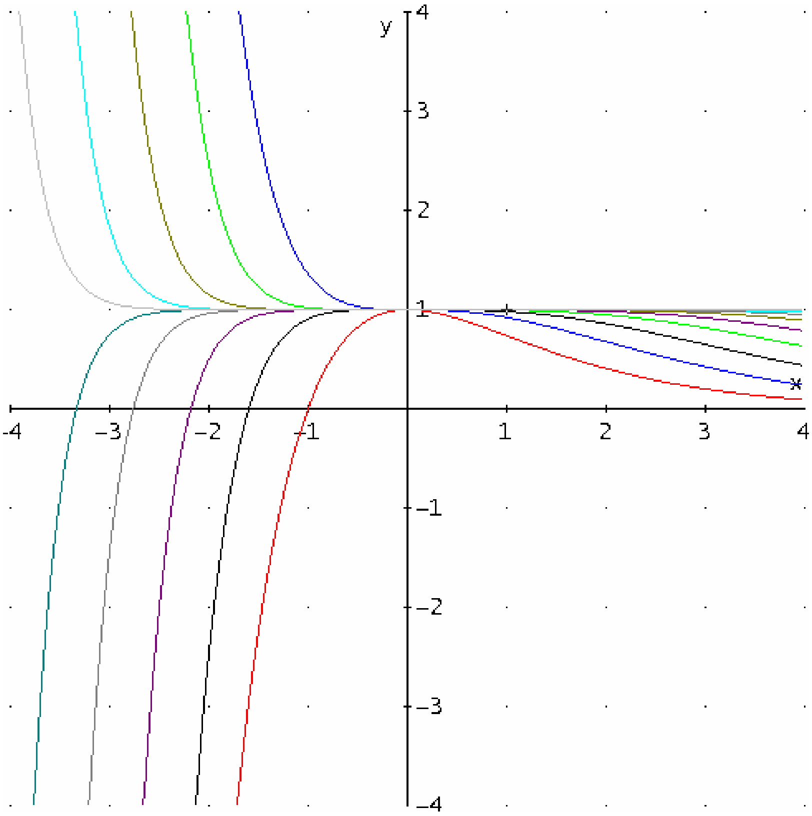
Punto 3. Abbastanza facile

Punto 4. Laborioso perché occorre integrare per parti due volte.

Si tratta quindi di un problema di analisi, quindi su argomenti svolti l'ultimo anno, con risultati di controllo e domande relativamente indipendenti. Tranne la parte iniziale, che poteva spaventare gli allievi, il problema è tutto sommato affrontabile.

Nota
Nella funzione data, il primo fattore è l'n-esimo polinomio di Taylor sviluppato con punto iniziale x=0 della funzione e^x. Tali polinomi, al crescere di n approssimano sempre meglio la funzione e^x. Quindi, al crescere di n, nelle vicinanze di x=0, la successione di funzioni tende a $e^x \cdot e^{-x} = 1$.

Ma questo non era richiesto e comunque è fuori dai pur vasti programmi del PNI.



Grafici delle funzioni date con n che varia da 1 a 10.