Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 23 giugno 2010

Soluzione del PROBLEMA 1 (a cura di V. Roselli, S. De Stefani e L. Tomasi)

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto R (0, 1)? E nel punto S (1, 0)? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

Punto 1)
Dopo aver tracciato il quadrato e le due circonferenze tangenti esternamente indicate dal testo, detto r il raggio da determinare, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PBQ (i vertici del quadrato sono ABCD in senso antiorario a partire da A in basso a sinistra), i cui lati sono:
PB $=1-x$, BQ$=1-r$, PQ$=x+r$ (se due circonferenze sono tangenti esternamente la distanza dei centri è la somma dei raggi), otteniamo:

$$(r+x)^2 = (1-r)^2 + (1-x)^2$$

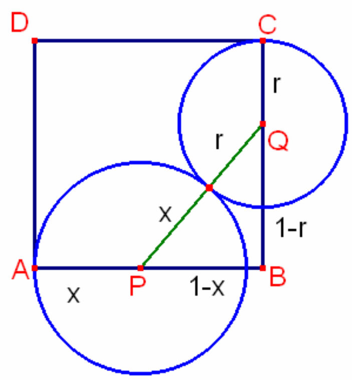

Figura 1

che sviluppando dà

$$r^2 + x^2 + 2rx = 1 + r^2 - 2r + 1 + x^2 - 2x$$

da cui semplificando

$$2rx = 2 - 2r - 2x$$

e quindi

$$r + rx = 1 - x$$

ossia

$$r = \frac{1-x}{1+x}$$

con $0 \le x \le 1$.

2)

La funzione $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ è un'iperbole equilatera traslata di asintoti le rette di equazioni x=−1 e y=−1, il cui grafico è facilmente tracciabile. Il centro di simmetria è pertanto $O'(-1;-1)$. La funzione è invertibile da $\Re \setminus \{-1\}$ a $\Re \setminus \{-1\}$ poiché è iniettiva (assume ogni valore una sola volta) e suriettiva.

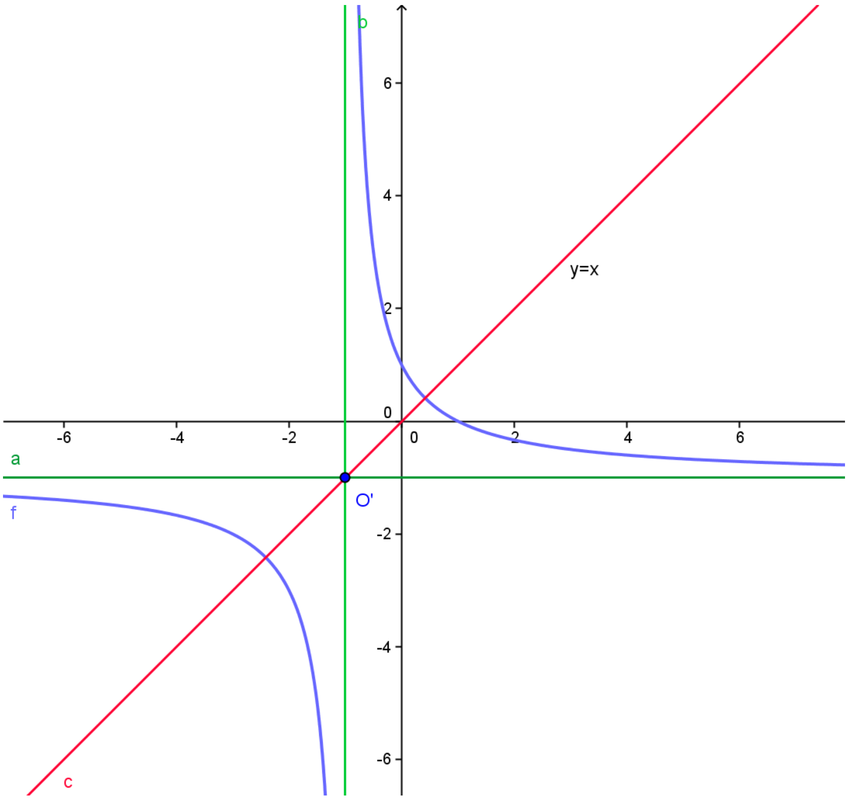

Figura 2

Come si vede bene dal grafico (figura 2) la funzione è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e quindi coincide con la sua inversa, come si può anche verificare scambiando x e y nell'equazione di $f(x)$ e ricavando poi nuovamente y in funzione di x.

3) Il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ simmetrizzando rispetto all'asse x la parte negativa del grafico di $f(x)$ e lasciando inalterata la parte di grafico con le ordinate non negative.

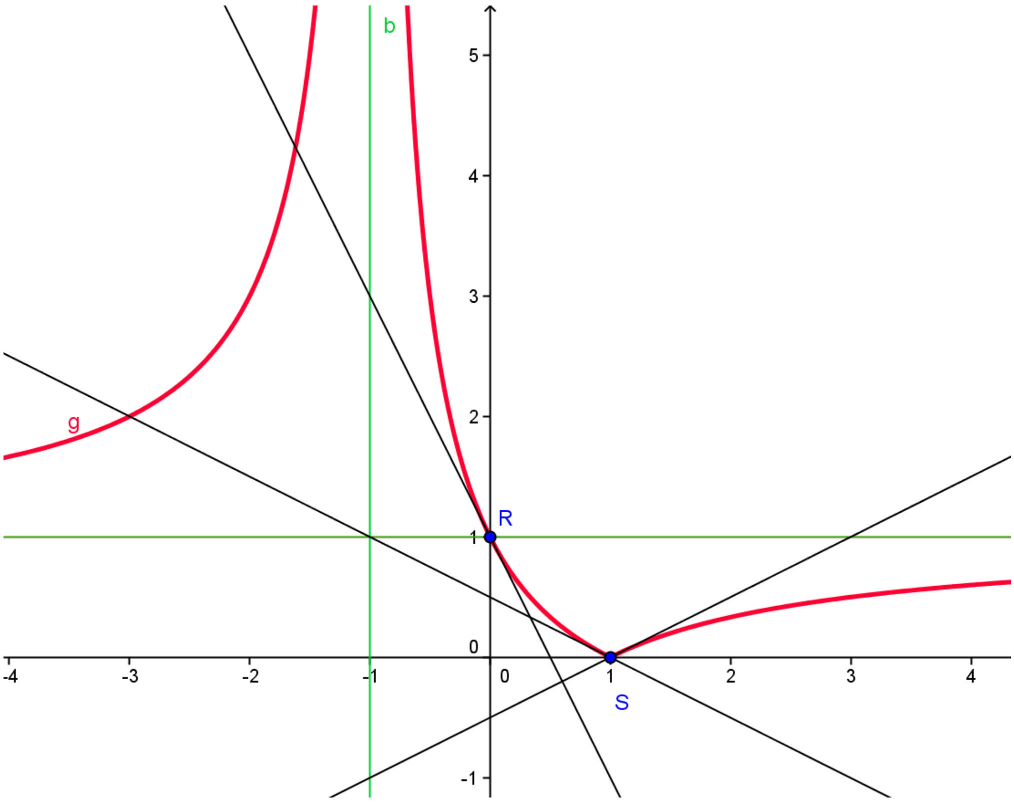

Figura 3

Per trovare la retta tangente al grafico di $g(x)$, oppure al grafico di $f(x)$, in $R(0,1)$, occorre calcolare la derivata di $f(x)$ nel punto R. Poiché come si vede subito,

$$f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

risulta $f'(0) = -2$ e quindi la tangente richiesta ha equazione $y - 1 = -2x$, ossia $y = -2x + 1$.
Il punto $S(1,0)$ è invece chiaramente un punto angoloso per il grafico di $g(x)$, cioè nel punto S la funzione $g(x)$ non è derivabile e la retta tangente non esiste. Possiamo dire però che esistono due rette tangenti ("destra" e "sinistra") in S ai due rami di $g(x)$ che si incontrano in S, una di coefficiente angolare 1/2 (a destra di S) e una di coefficiente angolare −1/2 (a sinistra di S), che avranno rispettivamente per equazioni: $y = \frac{1}{2}(x-1)$ e $y = -\frac{1}{2}(x-1)$.

4) L'area del triangolo mistilineo *ROS* richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale definito:

$$Area(ROS) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx\,.$$

Risulta

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x}\right)dx = \left[-x + 2\ln|1+x|\,\right]_0^1 = -1 + 2\ln 2 = \ln 4 - 1.$$

<u>GIUDIZIO</u>
Livello di difficoltà : medio.
E' in programma ? Sì
Normalmente si fa a scuola: Sì

E’ un argomento presente nei libri di testo : sempre.
Controlla conoscenze e competenze fondamentali.
Formulazione molto chiara.