Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 23 giugno 2010

Soluzione del PROBLEMA 2 (a cura di S. De Stefani e L. Tomasi)

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane *Oxy*, si consideri la funzione *f* definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

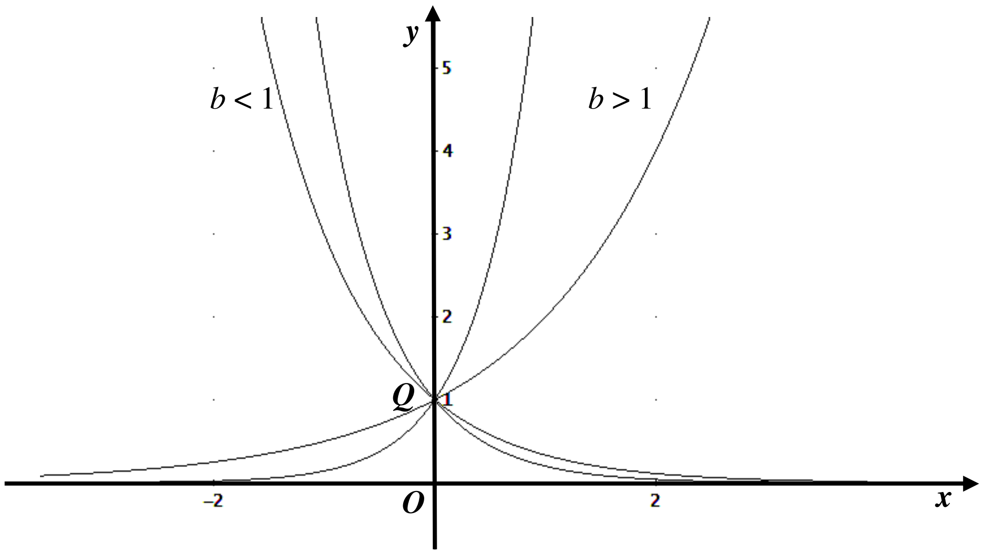
1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di *b*. Si illustri come varia G_b al variare di *b*.
2. Sia *P* un punto di G_b . La tangente a G_b in *P* e la parallela per *P* all'asse *y* intersecano l'asse *x* rispettivamente in *A* e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Per quali valori di *b* la lunghezza di *AB* è uguale a 1?
3. Sia *r* la retta passante per *O* tangente a G_e (*e* = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse *y*, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

Punto 1

Se $b > 1$, G_b è il grafico della funzione esponenziale con base maggiore di 1, funzione crescente e sempre positiva che interseca l'asse delle ordinate nel punto Q(0; 1), con $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Se $0 < b < 1$, G_b si ottiene con una simmetria rispetto all'asse *y* del grafico di G_{-b} poiché $b^x = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x}$.

La funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1 è una funzione decrescente e sempre positiva che interseca l'asse delle ordinate nel punto Q(0; 1), con $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



Punto 2

Sia P ∈ G_b, $P\left(k;b^k\right)$

La retta tangente a G_b in P ha equazione:

$y-b^k = f'(k)(x-k)$

Dato che si ha $f'(x)=b^x \cdot \ln b$,

$f'(k)=b^k \cdot \ln b$, quindi la retta tangente avrà equazione:

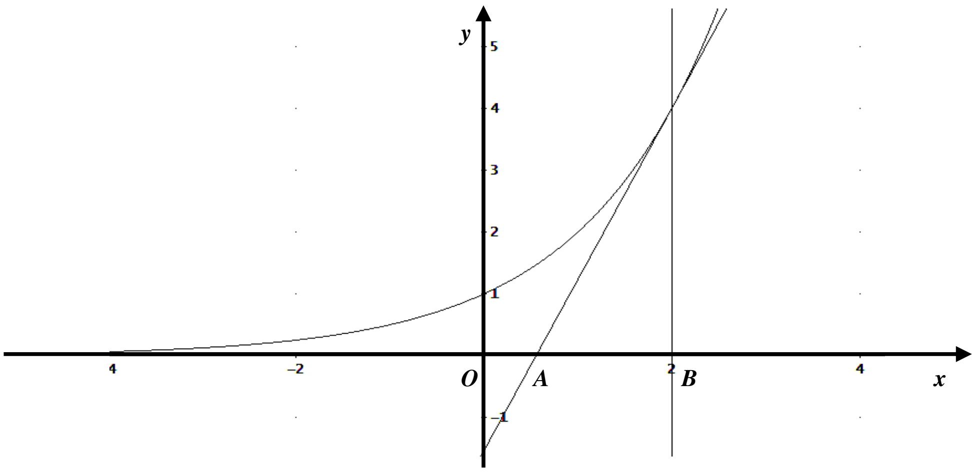
$y=b^k \cdot \ln b(x-k)+b^k$

La sua intersezione con l'asse x si ha quando $y = 0$, cioè per $-1=\ln b(x-k)$ che comporta

$x=k-\dfrac{1}{\ln b}=k-\log_b e$. Il punto A ha coordinate $A\left(k-\dfrac{1}{\ln b};0\right)$.

La parallela per P all'asse y ha equazione $x = k$, quindi $B(k; 0)$.

La lunghezza di AB è: $\overline{AB}=\left|x_B-x_A\right|=\left|k-k+\dfrac{1}{\ln b}\right|=\dfrac{1}{\left|\ln b\right|}=\left|\log_b e\right|$.



La lunghezza di AB vale 1 quando $\left|\ln b\right|=1$, cioè $\ln b=\pm 1$ che dà come soluzioni $b=e$ e $b=\dfrac{1}{e}$.

Quindi, per ogni funzione esponenziale $f(x)=b^x$ (con b positivo e diverso da 1) il segmento AB ha lunghezza costante.

Nota: La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ si chiama *sottotangente*. Quindi *le funzioni esponenziali hanno la sottotangente costante*. La misura della sottotangente della funzione $f(x)=b^x$ (considerata come misura di un segmento non orientato) vale $\dfrac{1}{\left|\ln b\right|}=\left|\log_b e\right|$.

Punto 3

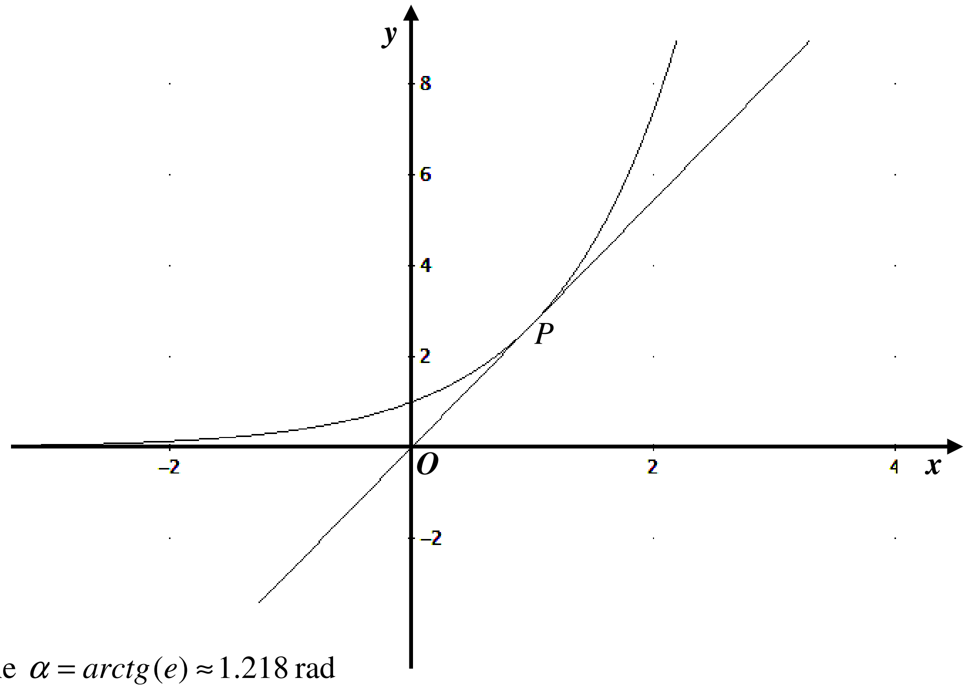
Sia $P(t;e^t)$ il punto di tangenza tra la funzione esponenziale e la retta *r* passante per l'origine di equazione $y = ax$.

Affinché *r* sia tangente alla funzione, il suo coefficiente angolare (*a*) deve essere uguale al valore della derivata della funzione calcolata in $x = t$; inoltre P deve appartenere ad *r*.

Si ha quindi:

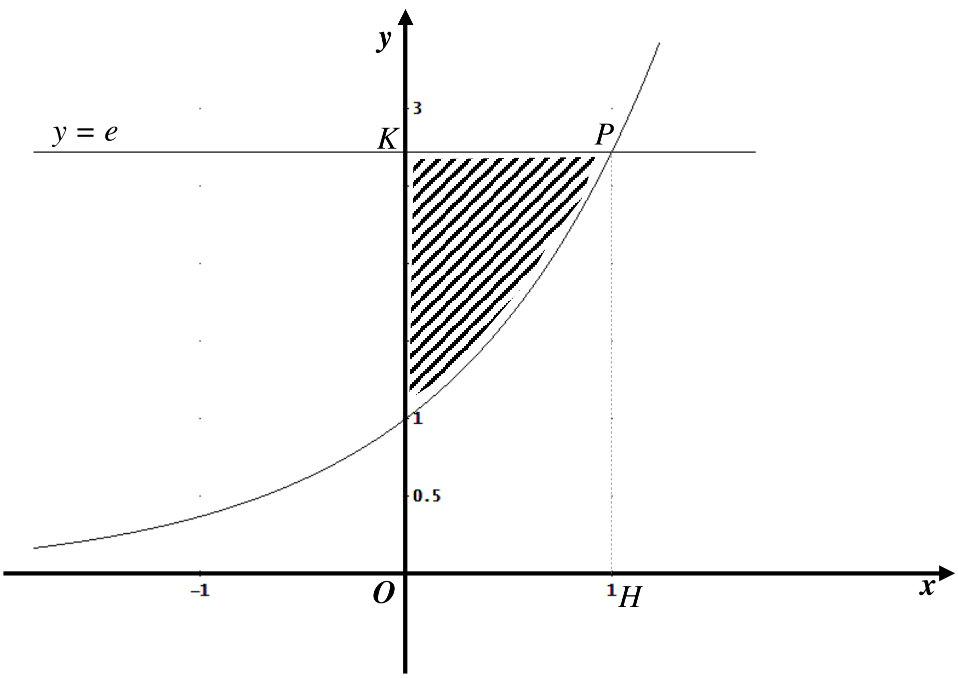
$\begin{cases} a = e^t \\ e^t = at \end{cases}$ che risolto dà $a = e$, $t = 1$.

La retta $y = ex$ è quindi tangente alla funzione $y = e^x$ nel suo punto P(1; *e*).



Ne consegue che $\alpha = arctg(e) \approx 1.218$ rad

Punto 4



L’area della regione D piana richiesta si può trovare come differenza tra l’area del rettangolo OHPK e l’integrale definito da 0 a 1 della funzione. Sia ha:

$$A_{OHPK} = 1 \cdot e = e$$

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e - 1$$

L’area richiesta misura quindi 1:

$$Area(D) = Area(OPHK) - Area(T) = e - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1\,.$$

<u>Giudizio</u>

Molto simile al problema 2 assegnato all’esame liceo scientifico di ordinamento 2009.

Qui invece di lavorare con funzioni logaritmiche si lavora con quelle esponenziali.

Punto 1. Banale.

Punto 2. Richiede una buona conoscenza delle derivate delle funzioni esponenziali oltre alla capacità di introdurre le coordinate di un punto generico senza usare i nomi soliti delle variabili.

Punto 3. Risulta facile se si usano i risultati del punto precedente.

Punto 4. Facile.

<table>
<tr><td colspan="2">Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☒ Basso</td><td colspan="2">☐ Medio</td><td colspan="2">☐ Alto</td></tr>
<tr><td colspan="2">È in programma?</td><td colspan="2">☒ Si’</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non si sa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normalmente si fa a scuola?</td><td colspan="2">☒ Si’</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td colspan="2">È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td><td colspan="2">☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione:</td><td colspan="2">☐ Scorretta</td><td>☐ Ambigua</td><td colspan="2">☐ Poco chiara</td><td>☒ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td colspan="3">Controlla una conoscenza e/o competenza fondamentale?</td><td colspan="3">☐ No</td><td colspan="2">☒ Si’</td></tr>
</table>