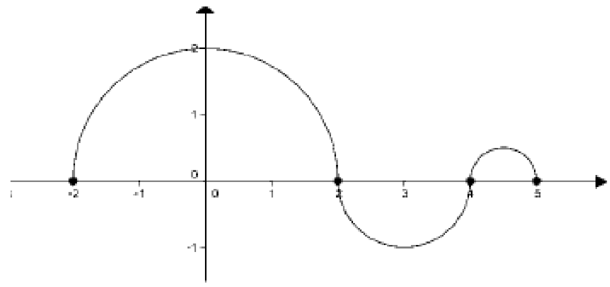
Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 23 giugno 2010

Soluzione del PROBLEMA 1
a cura di V. Roselli, L. Tomasi e S. De Stefani

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in (0, 0), (3, 0), ($\frac{9}{2}$, 0) e raggi rispettivi $2, 1, \frac{1}{2}$.



a) Si scriva un'espressione analitica di *g(x)*. Vi sono punti in cui *g(x)* non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?

b) Per quali valori di *x*, $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)\, dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.

d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

a)
Un'espressione analitica di $g(x)$ possibile può essere la seguente:

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & -2 \le x < 2 \\ -\sqrt{1-(x-3)^2}, & 2 \le x < 4 \\ \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2}, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

ottenuta scrivendo le equazioni delle tre circonferenze di cui sono dati centri e raggi ed esplicitando in ognuna la y, considerando per la prima e la terza il segno positivo davanti alla radice e per la seconda il segno negativo, visto il semipiano cui appartengono.
La funzione $g(x)$ non è derivabile in –2, 2, 4 e 5 perché in essi la retta tangente è parallela all'asse *y*. Tuttavia $g(x)$ è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[-2,5]$.

b)

La funzione $f(x)$ è una funzione integrale ricavata ottenuta da $g(x)$. Pertanto per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $f(x)$ è derivabile per ogni x dell'intervallo $[-2,5]$, con $f(-2)=0$. Poiché il segno di $g(x)$ indica gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$, questa ha un massimo relativo in $x=2$ e un minimo relativo in $x=4$ perché in tali punti $f'(x)=0$.

c)
Risulta
$f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt$ =somma algebrica delle aree delle prime due semicirconferenze, e quindi il suo valore è $2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$.
Invece per calcolare $f(1)$ basta togliere da 2π l'area di mezzo segmento circolare il cui angolo al centro, come si vede subito, è 60°. L'area di tale mezzo segmento circolare è $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi $f(1)=2\pi-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d)
Se la derivata seconda di $f(x)$ è nulla vuol dire che la derivata prima di $g(x)$ è nulla; quindi i punti di flesso della $f(x)$ sono i punti a tangente orizzontale al grafico di $g(x)$. I punti di flesso sono quindi x=0, x=3 e x= 9/2.
Chiaramente $f(x)$ è sempre non negativa. Si noti che $f(0)=\pi$ e $f(2)=2\pi$.
Raccogliendo tutte le osservazioni fatte, l'andamento qualitativo di $f(x)$ è quello indicato nella seguente figura.

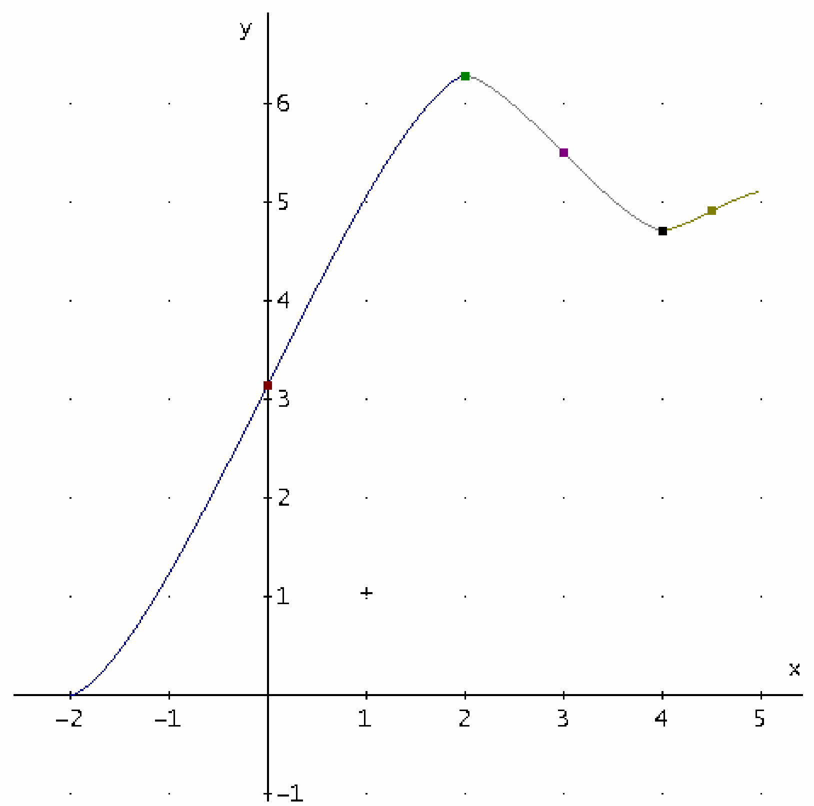


Figura-Grafico della funzione integrale $f(x)$

GIUDIZIO

Livello di difficoltà: piuttosto difficile, anche se con pochi calcoli.
E' in programma : sì
Normalmente si fa a scuola ? Forse non i tutti i corsi PNI.
E' un argomento presente nei libri di testo: non sempre sviluppato per bene.
Controlla una conoscenza e/o competenza fondamentale: sì
Formulazione: corretta, ma non chiarissima.