

**Esame di Stato Liceo Scientifico**

**Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 23 giugno 2010**

**Soluzione del QUESTIONARIO** (a cura di S. De Stefani e L. Tomasi)

**QUESITO 10**

Si consideri la regione  $R$  delimitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$ .

L'integrale  $\int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dx$  fornisce il volume del solido:

- a) generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $x$ ;
- b) generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $y$ ;
- c) di base  $R$  le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi di raggio  $\sqrt{x}$ ;
- d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

Risposta b)

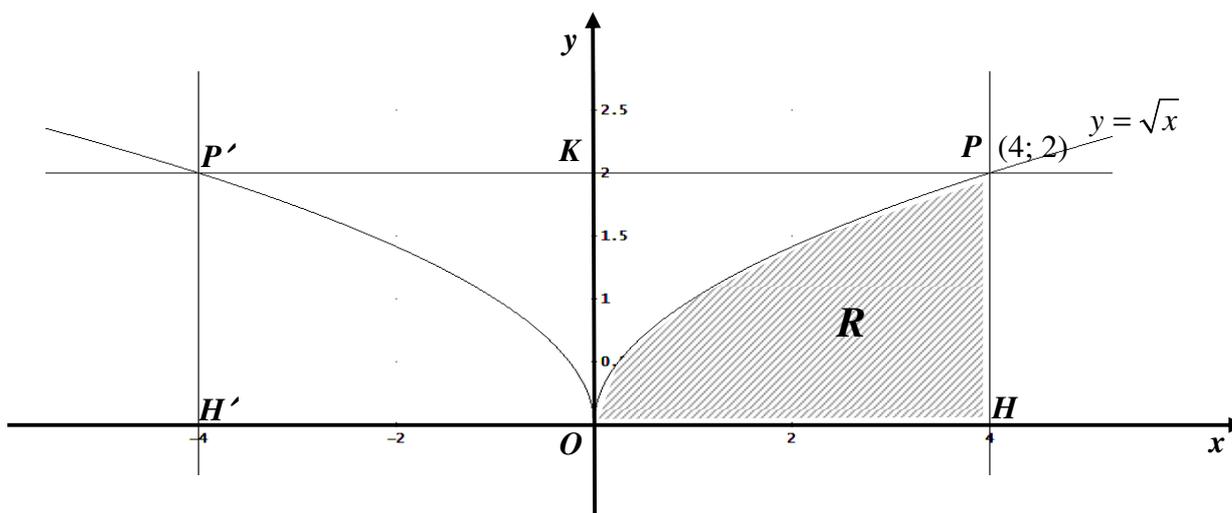


Figura 1

L'integrale dato vale:

$$\int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = 2\pi \left[ \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{128}{5} \pi .$$

Questo integrale fornisce il volume del solido generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $y$  (con il metodo, che di solito non si fa, che potrebbe essere chiamato dei “gusci cilindrici”, pensando il solido generato dalla superficie laterale di infiniti cilindri di circonferenza di base  $2\pi x$  e altezza  $\sqrt{x}$ ; la superficie deve essere intuitivamente pensata di spessore  $dx$ ). L'elemento “infinitesimo” di volume diventa pertanto (figura 2):

$$dV = 2\pi x \cdot \sqrt{x} \cdot dx .$$

[Domanda: un allievo di liceo scientifico, sia pure sperimentale, in quale parte del programma dovrebbe imparare questo?]

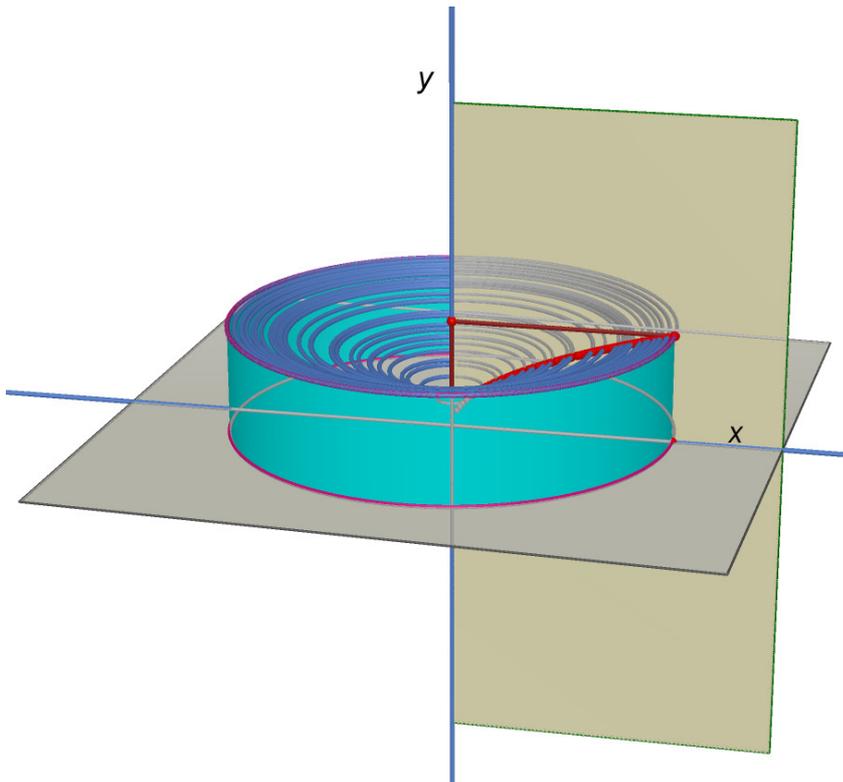


Figura 2

Infatti il volume  $V$  cercato è dato dalla differenza tra il volume  $V'$  del cilindro generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  del rettangolo  $OHPK$  con il volume  $V''$  del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  del triangolo mistilineo  $OPK$ .

Il volume del cilindro è  $V' = \pi OH^2 \cdot PH = 32\pi$ .

Il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  del triangolo mistilineo  $OPK$  è dato

$$\text{da } V'' = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \left[ \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi.$$

$$\text{Quindi si ha: } V = V' - V'' = 32\pi - \frac{32}{5}\pi$$

$$\text{Il volume richiesto è } V = \frac{128}{5}\pi.$$

### Giudizio

<b>Livello di difficoltà:</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto
<b>È in programma?</b>	<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> Non si sa; NO!
<b>Normalmente si fa a scuola?</b>	<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> Con questo metodo, MAI
<b>È un argomento presente nei libri di testo?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Mai, CON QUESTO METODO	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input type="checkbox"/> Sempre

<b>Formulazione:</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
<b>Controlla una conoscenza e/o competenza fondamentale?</b>	<input type="checkbox"/> No			<input checked="" type="checkbox"/> Sì, ma di ANALISI II, non da liceo	