



**MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (AMERICHE)**

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici O , $B(1; 0)$, $A(0; a)$, con $a > 0$.

Preso un punto P interno al triangolo, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P , parallela all'asse y , taglia i lati OB e AB rispettivamente.

1. Si dimostri che il luogo dei punti P , interni al triangolo OBA , tali che

$$QP : QR = OQ : OB$$

è un arco della parabola Γ d'equazione $y = ax(1 - x)$.

2. Si verifichi che il lato BA del triangolo e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e in O .
3. Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da OB . In Ω , si inscriba un rettangolo con un lato su OB ; si stabilisca per quale valore di a il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato.
4. Posto $a = \frac{1}{2}$, si indichi con r la retta ortogonale a Γ nel punto B . Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato da Ω nella rotazione attorno alla retta $y = -1$

PROBLEMA 2

In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$ avente il lato CD uguale al raggio. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano in un punto E .

1. Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha:

$$D\hat{A}C = D\hat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$$

2. Se $x = D\hat{A}B$, si provi che la somma $CE + DE$ in funzione di x è data da $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$. Quale è l'intervallo di variabilità della x ? Quale il valore massimo assunto da $CE + DE$?
3. Posto $g(x) = k \operatorname{sen}(x + \varphi)$ si trovino k e φ di modo che sia $g(x) = f(x)$
4. Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ di $f(x)$ e si denoti con R la regione delimitata, per $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right]$, dall'asse x e da Γ . Si calcoli l'area di R e si calcoli altresì il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse x .

QUESTIONARIO

1. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fra il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e l'asse x . Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W ?
A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x dx$; B) $\pi \int_0^1 (\operatorname{arcsen} x)^2 dx$; C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$; D) nessuno di questi.
Si motivi la risposta
2. Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B , una fontana in F e un lampione in L . Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede FL pari a 45° . Sapendo che $BF=12\text{m}$ e $FL=20\text{m}$ e che $\widehat{BFL} = 155^\circ$, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare AB , AF e AL . Sono attendibili i risultati $AB=AF \cong 23,18\text{m}$ e $AL \cong 27,85\text{m}$?
3. La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta d'equazione: $4x + 5y = 20$. Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi.
4. Si spieghi perchè l'equazione $\cos x = x$ ha almeno una soluzione.
5. Si risolva l'equazione $|x - 1| = 1 - |x|$
6. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?
7. Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.
8. Sia $t \in [0; 2\pi]$; quale è la curva rappresentata dalle equazioni $x = a \cos t$ e $y = b \operatorname{sen} t$?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.