Esame di Stato 2010-2011 23 giugno 2011 - Liceo Scientifico - corso di ordinamento

PROBLEMA 1

Risoluzione della prof. S. De Stefani

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

Punto 1.

G_f: $f(x) = x^3 - 4x$

Dominio: D: R

Simmetria: $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$, dispari, come era ovvio aspettarsi essendo una funzione polinomiale che contiene soltanto termini di grado dispari.

Intersezione con gli assi coordinati:
Asse y: $x = 0 \Rightarrow y = 0$
Asse x: $y = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$, $x = 0, x = \pm 2$
$O(0;0)$, $A(2, 0)$, $B(-2; 0)$

Segno: $f(x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 0$ e $x > 2$

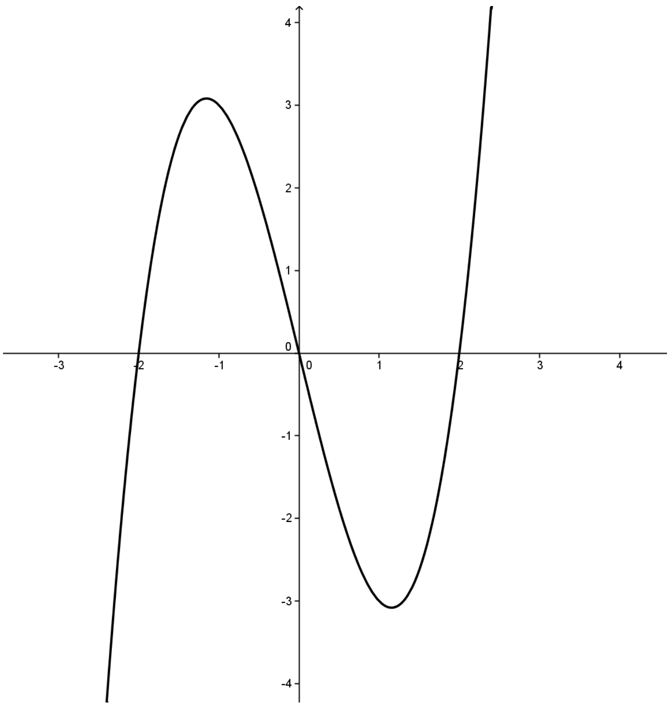
Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Una funzione polinomiale ovviamente non ha asintoti

Massimi, minimi, flessi:

$f'(x) = 3x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \cup x > \frac{2}{\sqrt{3}}$

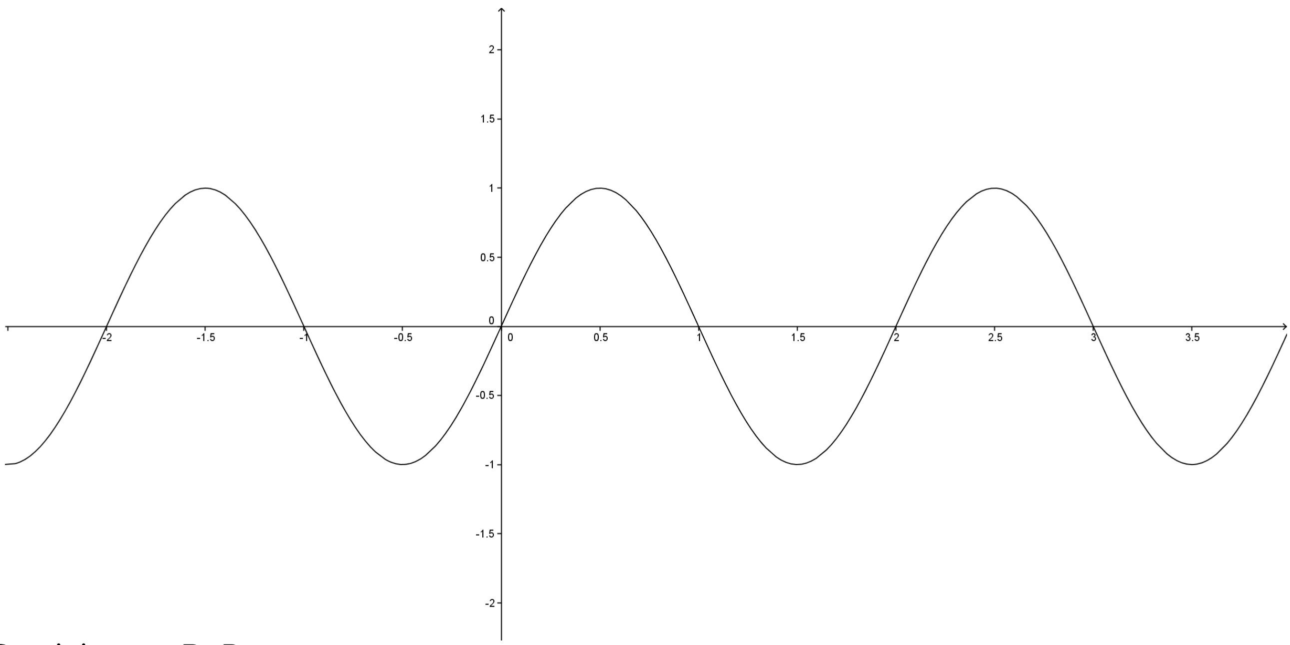
MASSIMO $M\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$; minimo $m\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$

$f''(x) = 6x > 0 \Rightarrow x > 0$: il flesso è l'origine degli assi, come era ovvio apettarsi, essendo una cubica dispari.



G_g : $g(x) = \mathrm{sen}\pi x$

Funzione armonica dispari: $y = \mathrm{sen}\pi x$, di periodo $T = 2$.



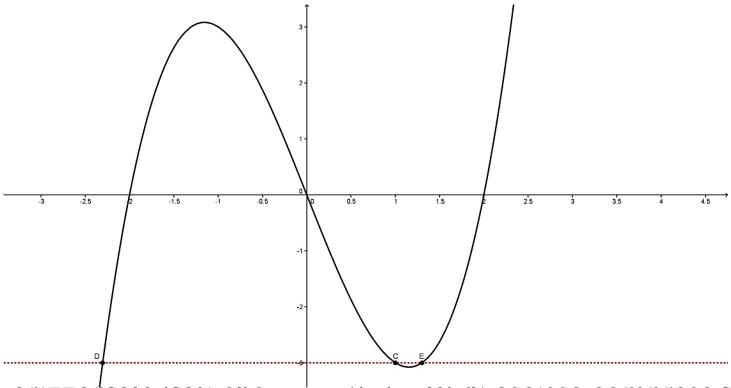
Dominio : D: R
Simmetrie: funzione dispari
Intersezioni con l'asse x : $(k; 0)$, $k \in Z$
Segno: $g(x) > 0 \Rightarrow 2k < x < 2k + 1$, con $k \in Z$
Massimi $M_i(2k + ½; 1)$,   minimi $N_j(2k - ½; -1)$,   flessi: $(k; 0)$, $k \in Z$

Punto 2.

Intersezioni di G_f con la retta $y = -3$:

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \overset{Ruffini}{\Leftrightarrow} (x-1)\left(x^2 + x - 3\right) = 0 \Rightarrow$$

$$C(1;-3), \quad D\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-3\right), \quad E\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2};-3\right)$$

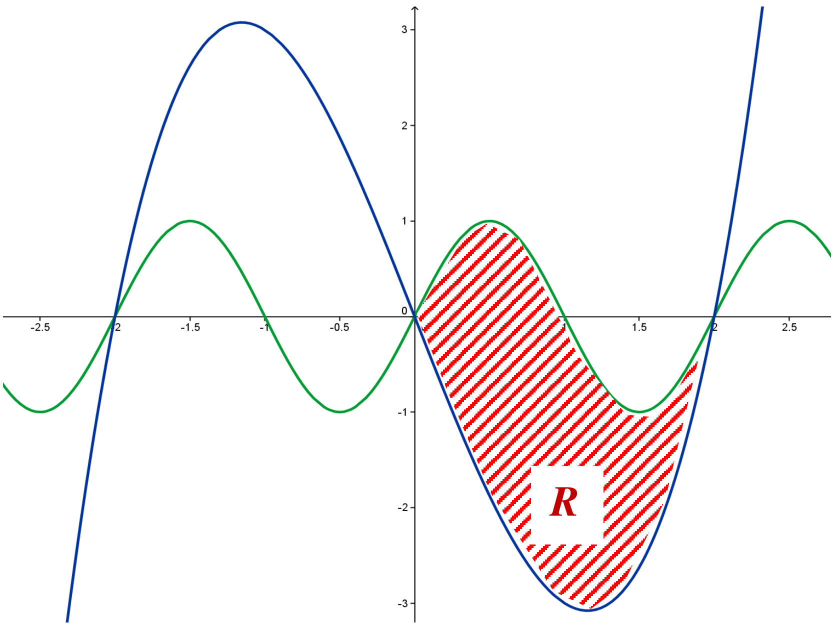


Punti di G_g a tangente orizzontale (tali che $m = g'(x) = 0$) di ascissa compresa tra – 6 e 6:

$g'(x) = \pi\cos\pi x = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} + k$.

In particolare, con – 6 ≤ x ≤ 6, si hanno i punti $\left(\pm\frac{1}{2};\pm 1\right)$, $\left(\pm\frac{5}{2};\pm 1\right)$, $\left(\pm\frac{9}{2};\pm 1\right)$ e $\left(\pm\frac{3}{2};\mp 1\right)$, $\left(\pm\frac{7}{2};\mp 1\right)$, $\left(\pm\frac{11}{2};\mp 1\right)$

<u>Punto 3</u>.



L'area richiesta si calcola attraverso un integrale definito.

$$R=\int_0^2\left[sen\pi x-\left(x^3-4x\right)\right]dx=\int_0^2\left(sen\pi x-x^3+4x\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2=-\frac{\cos 2\pi}{\pi}-4+8-\left(-\frac{\cos 0}{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi}+4+\frac{1}{\pi}=4.$$

L'area richiesta vale 4.

Punto 4.

Le sezioni della massa d'acqua condotte con piani perpendicolari all'asse x sono dei rettangoli di altezza $h(x)$ e base $g(x)-f(x)$.

Il volume richiesto è dato dal calcolo del seguente integrale definito ("metodo delle fette"):

$$V=\int_0^2\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)\cdot h\left(x\right)dx=\int_0^2\left(sen\pi x-x^3+4x\right)\left(3-x\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(3sen\pi x-3x^3+12x-xsen\pi x+x^4-4x^2\right)dx=\int_0^2\left(\left(3-x\right)sen\pi x+x^4-3x^3-4x^2+12x\right)dx\,*$$

Calcoliamo dapprima:

$\int\left(3-x\right)sen\pi xdx=$ per parti con $f'(x)=sen\pi\ x$ (da cui $f(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$) e $g(x)=3-x$ da cui $g'(x)=-1$

si ha:

$$\int\left(3-x\right)sen\pi xdx=\left(3-x\right)\left(-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right)-\int-1\cdot\left(-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right)dx=\left(x-3\right)\frac{\cos\pi x}{\pi}-\int\frac{\cos\pi x}{\pi}dx=$$

$$=\frac{\left(x-3\right)\cos\pi x}{\pi}-\frac{sen\pi x}{\pi^2}+c$$

Tornando al calcolo del volume, si ottiene:

$$*V=\left[\frac{\left(x-3\right)\cos\pi x}{\pi}-\frac{sen\pi x}{\pi^2}+\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+6x^2\right]_0^2=$$

$$=\frac{-\cos 2\pi}{\pi}-0+\frac{32}{5}-12-\frac{32}{3}+24-\left(-\frac{3}{\pi}-0\right)=$$

$$-\frac{1}{\pi}+\frac{32}{5}-\frac{32}{3}+12+\frac{3}{\pi}=\frac{2}{\pi}+\frac{96-160+180}{15}=\frac{2}{\pi}+\frac{116}{15}\left(\approx 8{,}37\text{ approssimato}\right)$$

Il risultato è in m^3. Dunque la vasca contiene circa 8.370 l di acqua.

<table>
<tr><td colspan="2">Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ basso</td><td colspan="2">☒ medio</td><td>☐ alto</td></tr>
<tr><td colspan="2">E’ in programma?</td><td colspan="2">☒ si</td><td colspan="2">☐ no</td><td>☐ non si fa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normalmente si fa a scuola?</td><td colspan="2">☐ si</td><td colspan="2">☐ no</td><td>☒ non sempre</td></tr>
<tr><td colspan="2">E’ un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ si</td><td colspan="2">☐ mai</td><td>☒ non sempre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Controlla una conoscenza / abilità / competenza fondamentale?</td><td colspan="3">☒ si</td><td colspan="2">☐ no</td></tr>
<tr><td>Formulazione</td><td>☐ molto chiara</td><td>☐ corretta</td><td colspan="2">☒ poco chiara</td><td>☐ ambigua</td><td>☐ scorretta</td></tr>
</table>

Osservazione: Difficile da comprendere il punto 4. Si doveva usare il “metodo delle fette”…