PROBLEMA 2

Soluzione a cura delle prof. S. De Stefani e L. Rossi

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)\ e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\mathbf{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)\ e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbf{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \le 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Punto 1.

$$f(x) = (ax + b)\,e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

Se la funzione ammette un massimo nel punto di ascissa 4 significa che $f'(4) = 0$ (il fatto che esso sia effettivamente un punto di massimo e non semplicemente un punto stazionario lo si appura in seguito con lo studio di funzione). Inoltre la funzione passa per il punto (0; 2).

Calcolo la derivata della funzione:

$$f'(x) = a\,e^{-\frac{x}{3}} + (ax + b)\,e^{-\frac{x}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Imposto il sistema:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 3 = 2 \\ a\,e^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}(4a + b)\,e^{-\frac{4}{3}} = 0 \end{cases}$$

da cui $$\begin{cases} b = -1 \\ a - \frac{1}{3}(4a - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a - \frac{4}{3}a = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Punto 2.

Studio della funzione: $f(x)=(x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}+3$

Dominio: *R*

Simmetrie notevoli: $f(-x)=(-x-1)\,e^{\frac{x}{3}}+3\neq \pm f(x)$, né pari né dispari

Segno: non si riesce a risolvere la disequazione $f(x)>0$, si deduce il segno della funzione con lo studio della derivata prima oppure con metodo grafico approssimato.

Intersezioni con gli assi coordinati
Asse *x*: si rimanda a dopo lo studio della derivata prima
Asse *y*: (0; 2)

Limiti, asintoti e continuità:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (no asintoti obliqui, essendo $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$)

$\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}+3\right)=[\infty\cdot 0]$ forma indeterminata

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^{\frac{x}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ forma indeterminata, applico il teorema di De L'Hopital $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=0$

Dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$, $y = 3$ asintoto orizzontale a $+\infty$.

La funzione è continua in *R*.

Studio della derivata prima: $f'(x)=e^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}(x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\,e^{-\frac{x}{3}}(4-x)$

Il dominio della derivata prima è *R*, dunque la funzione è derivabile in *R*.
Punti stazionari: $f'(x)=0$ per $x=4$
Intervalli di crescenza: $f'(x)>0$ se $x<4$
Intervalli di decrescenza: $f'(x)<0$ se $x>4$

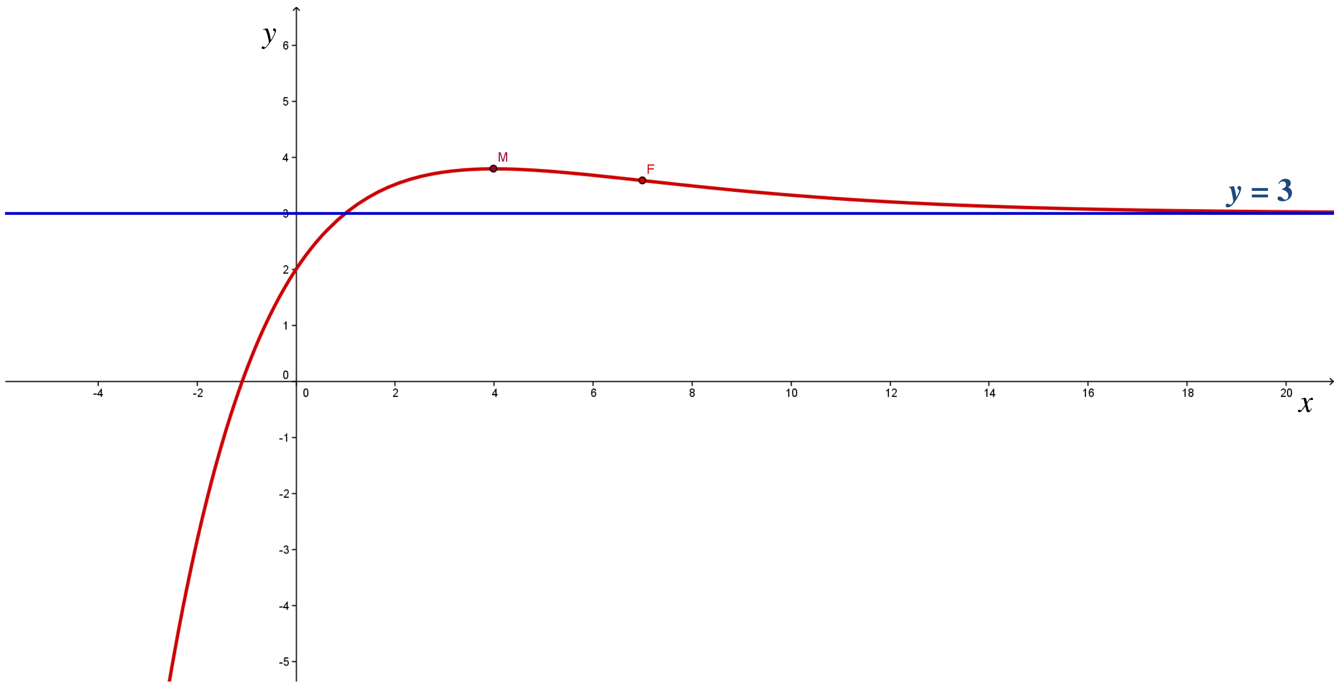
Dunque $x = 4$ è un punto di massimo relativo (anche assoluto), il massimo assoluto vale $3e^{-\frac{4}{3}}+3$.

A questo punto possiamo dedurre informazioni riguardo il segno della funzione: essa incontra l'asse *x* nel punto (α; 0), con α < 0; risulta negativa per $x<\alpha$ e positiva per $x>\alpha$ (α è un numero irrazionale compreso nell'intervallo]–2; –1[- per il Teorema di Bolzano).

Studio della derivata seconda: $f''(x)=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(4-x)-e^{-\frac{x}{3}}\right]=\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(x-7)$

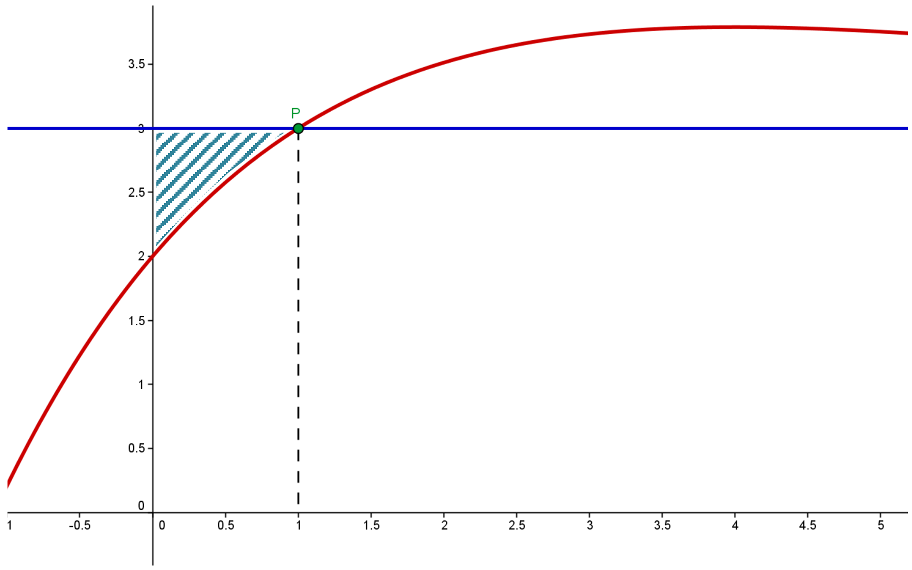
$x = 7$ è punto di flesso a tangente obliqua, la funzione è concava per $x < 7$, convessa per $x > 7$.

In $x = 7$ la funzione assume valore $6e^{-\frac{7}{3}}+3$.



Punto 3.

L'asintoto orizzontale $y = 3$ incontra il grafico della funzione nel punto $P(1; 3)$.



L'area da calcolare equivale a: $\displaystyle\int_0^1 \left\{3-\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3\right]\right\}dx = \int_0^1 (1-x)e^{-\frac{x}{3}}dx$

Calcolando l'integrale indefinito $\int (1-x)\, e^{-\frac{x}{3}}dx$ per parti,

con $f'(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ ($\Rightarrow f(x) = -3e^{-\frac{x}{3}}$) e $g(x) = (1-x)$ ($\Rightarrow g'(x) = -1$), si ha:

$$\int (1-x)\, e^{-\frac{x}{3}} dx = -3\, e^{-\frac{x}{3}} (1-x) - \int 3\, e^{-\frac{x}{3}} dx = 3(x-1)\, e^{-\frac{x}{3}} + 9\, e^{-\frac{x}{3}} = 3\, e^{-\frac{x}{3}} (x+2) + c, \quad c \in R.$$

Tornando all'integrale definito, l'area richiesta vale:

$$\int_0^1 (1-x)\, e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[3e^{-\frac{x}{3}} (x+2) \right]_0^1 = 9e^{-\frac{1}{3}} - 6.$$

<u>*Punto* 4</u>.

anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Verifichiamo che: $|f(x_i) - y_i| \le 10^{-1}, \forall i, \, con \; 0 \le i \le 6$

Infatti, con l'uso della calcolatrice, si ottiene:

x_i	$f(x_i)$	y_i	$\lvert f(x_i) - y_i \rvert$ (approssimazione)
0	2	1,97	0,03
1	3	3,02	0,02
2	$e^{-\frac{2}{3}} + 3$	3,49	0,02
3	$2e^{-1} + 3$	3,71	0,02
4	$3e^{-\frac{4}{3}} + 3$	3,80	0,01
5	$4e^{-\frac{5}{3}} + 3$	3,76	0,00
6	$5e^{-2} + 3$	3,65	0,03

I valori dell'ultima colonna sono tutti inferiori a 0,1. Quindi la funzione $f(x) = (x-1)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3$ rappresenta in modo accettabile, secondo il criterio fissato, l'andamento del profitto dell'azienda.

L'evoluzione del profitto - approssimato tramite la funzione - potrà anche portare a profitti inferiori a 3 milioni di euro. Il fatto è che la funzione è accettata come "buona" perchè approssima il profitto a meno di 1/10; ovviamente si può trovare di sicuro un istante di tempo nel quale il valore della funzione dista da 3, da sopra, ad esempio, per meno di un milionesimo; a quel punto il profitto potrebbe benissimo essere di 2,9999999 milioni di euro e la curva rappresentare sempre bene il fenomeno.

Livello di difficoltà:	☐ basso	☒ medio	☐ alto
E' in programma?	☒ si	☐ no	☐ non si fa
Normalmente si fa a scuola?	☒ si	☐ no	☐ non sempre
E' un argomento presente nei libri di testo?	☒ si	☐ mai	☐ non sempre

Controlla una conoscenza / abilità / competenza fondamentale?	☒ si'	☐ no

Formulazione	☐ molto chiara	☒ corretta	☐ poco chiara	☐ ambigua	☐ scorretta