PROBLEMA 2

Risoluzione a cura di S. De Stefani e L. Rossi

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\,\frac{\pi}{2}x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Punto 1.

G_f : $f(x) = x^3 - 16x$

dominio: D: R

simmetria: $f(-x) = -x^3 + 16x = -f(x)$, funzione dispari (come è ovvio, visto che è una funzione polinomiale con solo termini di grado dispari)

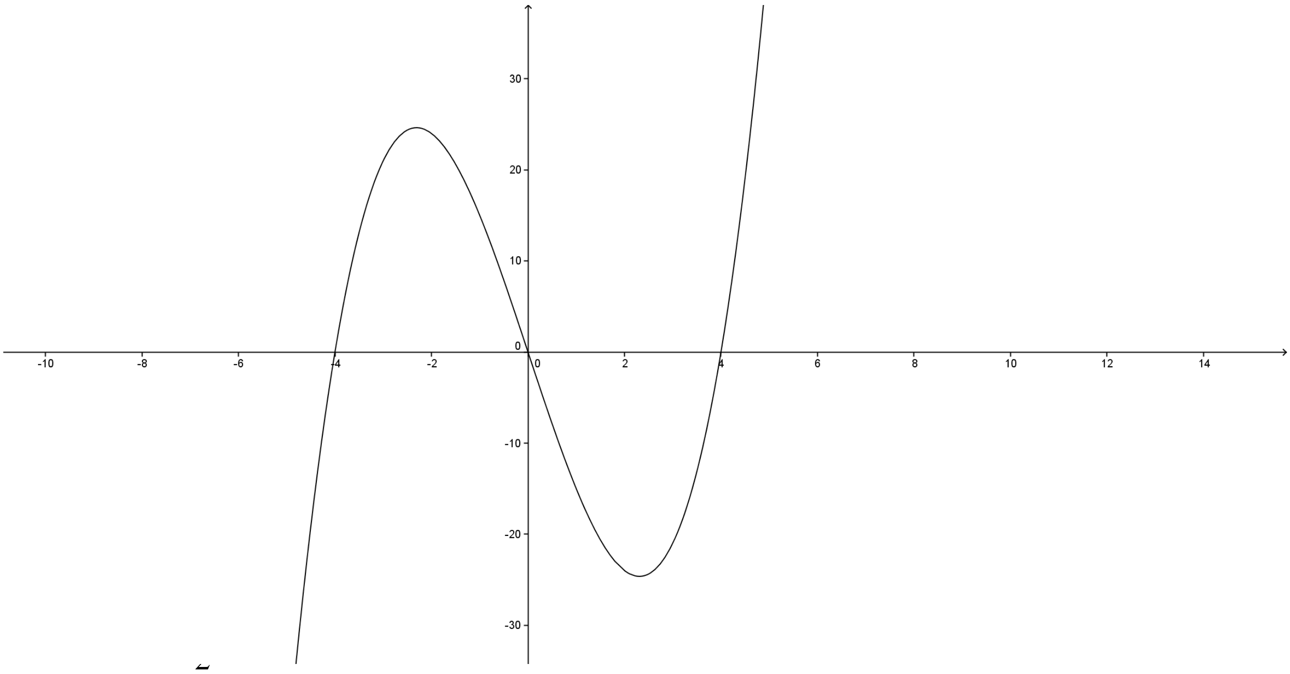
Intersezione con gli assi coordinati:
Asse y: $x = 0$, $y = 0$
Asse x: $y = 0$, $x(x^2 - 16) = 0$, $x = 0, x = \pm 4$
$O(0;0)$, $A(4, 0)$, $B(-4; 0)$

Segno: $f(x) > 0$ per $-4 < x < 0$ e $x > 4$.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. ovviamente una funzione polinomiale non ha asintoti.

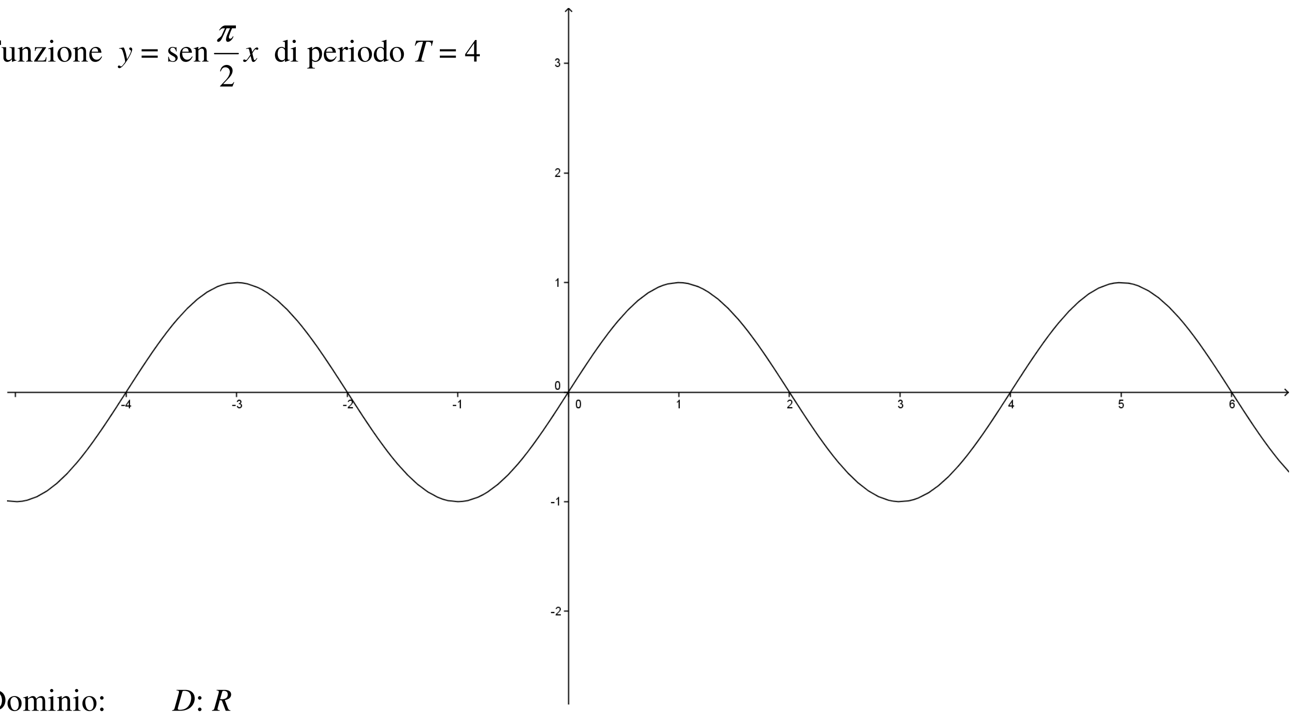
Massimi, minimi, flessi:
$f'(x) = 3x^2 - 16 > 0$, che implica $x < -\frac{4}{\sqrt{3}}, x > \frac{4}{\sqrt{3}}$
Massimo $C\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{128}{3\sqrt{3}}\right)$, minimo $D\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{128}{3\sqrt{3}}\right)$

$f''(x) = 6x > 0$ che implica $x > 0$: l'origine è un punto di flesso (ed è il centro di simmetria della cubica).



G_g

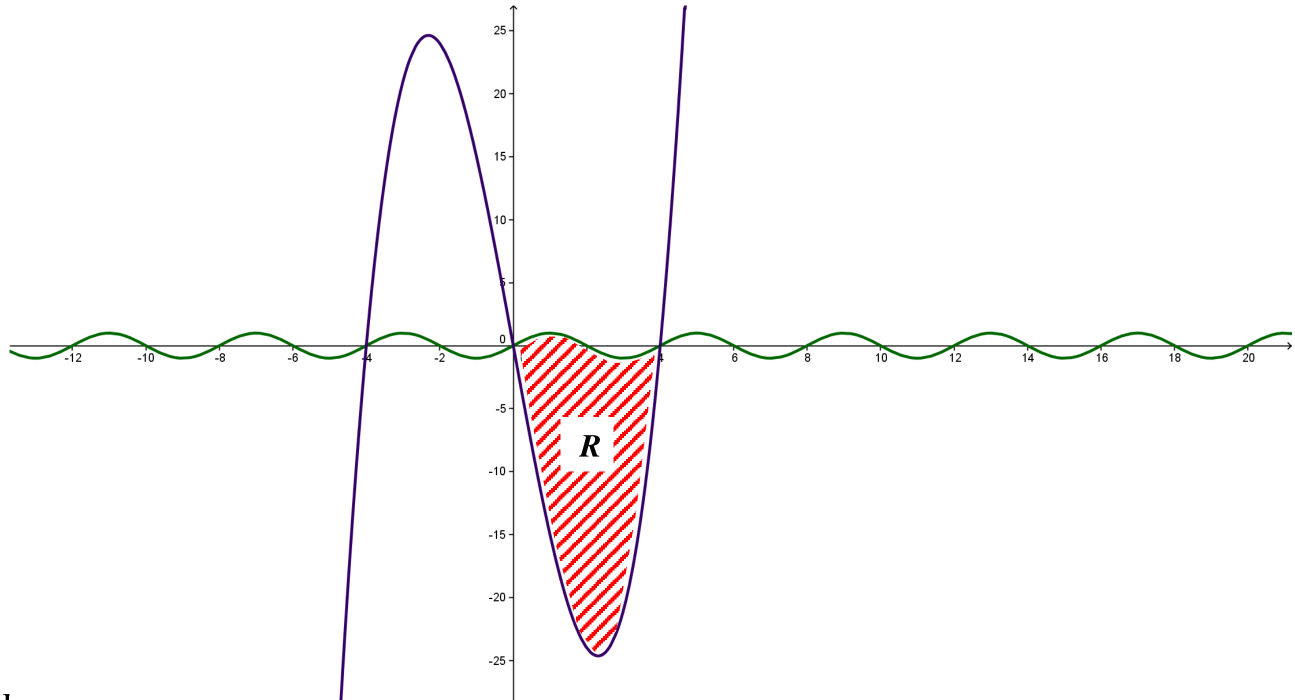
Funzione $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}x$ di periodo $T = 4$



Dominio: D: R
E' una funzione armonica dispari
Intersezioni con l'asse x : $(2k; 0)$, $k \in Z$
Segno: $g(x) > 0$, che implica $4k < x < 4k + 2$, con $k \in Z$
Massimi $M_i(4k + 1; 1)$, minimi $N_j(4k - 1; -1)$, flessi: $(2k; 0)$, $k \in Z$

I punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ hanno coordinate $(4k+1; 1)$ con $k \in Z$, $-2 \le k \le 2$ e $(4k-1; -1)$ con $k \in Z$, $-2 \le k \le 2$

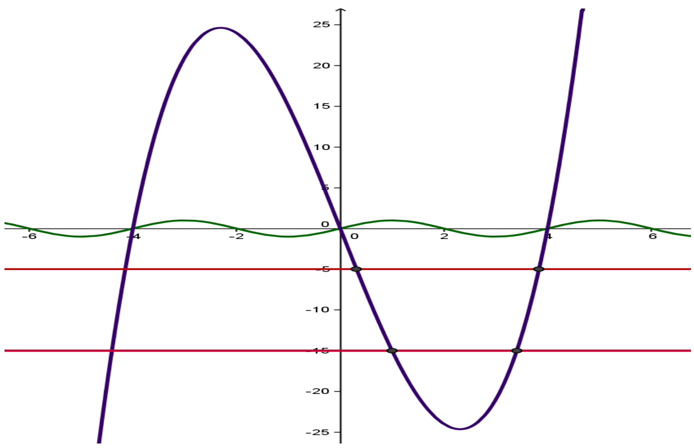
Punto 2.



L'area richiesta si calcola attraverso l'integrale definito.

$$\int_0^4 \left[sen\frac{\pi}{2}x - \left(x^3 - 16x\right) \right] dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right]_0^4 = \left[\left(-\frac{2}{\pi} - 64 + 128 \right) - \left(-\frac{2}{\pi} \right) \right] = 64$$

Punto 3



Intersezioni con la retta y=-15

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -15 \end{cases}$$

Risolvendo (con il teorema di Ruffini) si ottengono le soluzioni:

x=1, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$

Intersezioni con la retta y=-5

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -5 \end{cases}$$

$$x^3 - 16x + 5 = 0$$

Applicando il metodo delle tangenti alla funzione $f(x) = x^3 - 16x + 5$ per la risoluzione dell'equazione; dal grafico si individua l'intervallo di appartenenza delle tre soluzioni:

$\alpha \in]-5;-4[$, $\beta \in]0;1[$, $\gamma \in]3;4[$

Dunque si genera la successione : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

L'approssimazione di α a meno di 10^{-1} è -4,1

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
-5	-40	59	-4,32
-4,32	-6,58	40,03	-4,15
-4,15	-0,34	35,85	-4,14

L'approssimazione di β a meno di 10^{-1} è 0,3

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	5	-16	0,31
0,31	0,03	-15,70	0,31

L'approssimazione di γ a meno di 10^{-1} è 3,8

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
4	5	32	3,84
3,84	0,28	28,32	3,83

<u>Punto 4</u>.

Le sezioni ottenute intersecando il solido occupato dall'acqua con un piano perpendicolare all'asse delle *x* sono dei rettangoli.

Usando il "metodo delle fette", il volume richiesto è dato dal calcolo del seguente integrale definito:

$$\int_0^4 \left[sen\frac{\pi}{2}x - \left(x^3 - 16x\right) \right] (5-x)\,dx = \int_0^4 \left[sen\frac{\pi}{2}x\,(5-x) + x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 80x \right] dx =$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito per parti:

$$\int sen\frac{\pi}{2}x\,(5-x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\,(5-x) - \int \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi}(x-5)\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi^2}sen\frac{\pi}{2}x + c, c \in R$$

con $f'(x) = sen\frac{\pi}{2}x$ (da cui $f(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x$)

e con $g(x) = 5 - x$ (da cui $g'(x) = -1$)

Dunque si ha:

$$\int_0^4 \left[sen\frac{\pi}{2}x\,(5-x) + x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 80x \right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}(x-5)\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi^2} sen\frac{\pi}{2}x + \frac{x^5}{5} - \frac{5}{4}x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 40x^2 \right]_0^4 =$$

$$= \left(-\frac{2}{\pi} + \frac{1024}{5} - 320 - \frac{1024}{3} + 640 \right) - \left(\frac{-10}{\pi} + 0 \right) = \frac{8}{\pi} + \frac{3072 - 5120 + 4800}{15} = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15} (\cong 186{,}0131 \quad \text{approssimato})$$

Il risultato è in m^3. Dunque la piscina contiene circa 186013 l d'acqua.