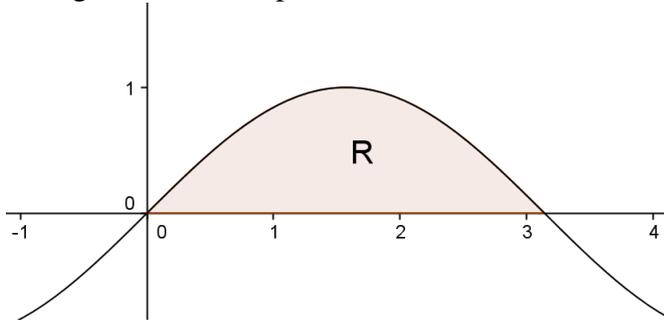


**Quesito 3 PNI**

Sia  $R$  la regione delimitata, per  $x \in [0, \pi]$ , dalla curva  $y = \sin x$  e dall'asse  $x$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .

La regione  $R$  è un trapezoide che ruotando forma un solido di rotazione.



*Primo metodo (“metodo dei gusci cilindrici”)*

Possiamo pensare il solido generato da “gusci cilindrici” con lo stesso asse, che hanno come circonferenza di base  $2\pi x$  e per altezza  $\sin x$ , con  $x$  che varia da 0 a  $\pi$ . Quindi il volume del solido di rotazione  $W$  (una specie di “ciambella senza il buco”) è dato dal seguente integrale definito:

$$V = \text{Volume}(W) = \int_0^{\pi} (2\pi x) \sin x \, dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx .$$

Calcolando l'integrale  $\int x \sin x \, dx$ , per parti, si ottiene:

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c .$$

Quindi il volume è dato da:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2\pi [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = 2\pi(\pi - 0) = 2\pi^2 .$$

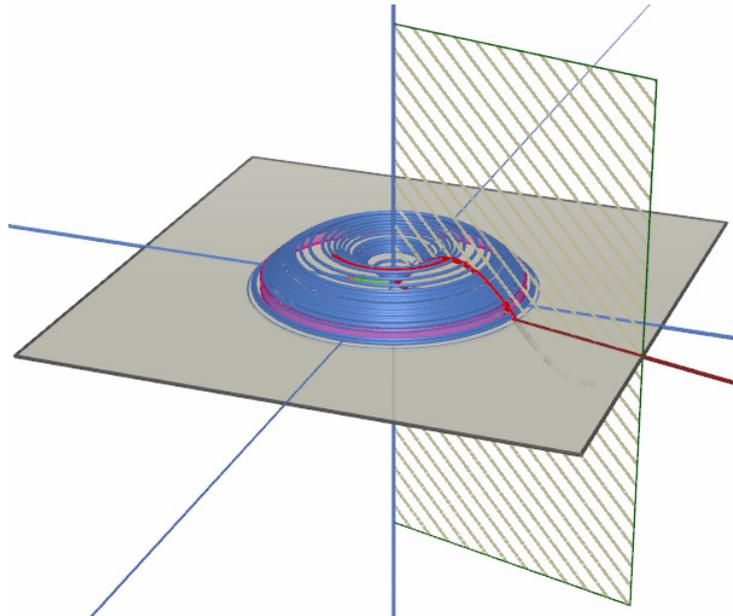


Figura 2

*Secondo metodo (con il 2° teorema di Pappo-Guldino)*

La regione  $R$  è un trapezoide che ruotando forma un solido di rotazione.

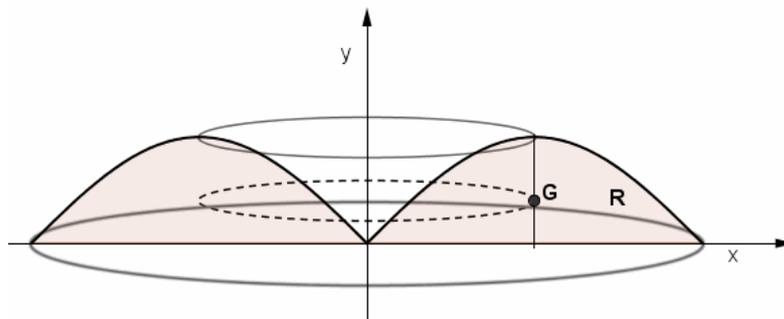


Figura 3

Il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando la regione  $R$  attorno all'asse  $y$  si può determinare usando il II teorema di Pappo-Guldino. Il volume è dato dal prodotto dell'area della regione  $R$ , che è 2, per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro  $G$  della regione  $R$ . Non occorre determinare l'ordinata del baricentro di  $R$  perché basta conoscere la sua ascissa, che per ragioni di simmetria è  $x_G = \frac{\pi}{2}$ .

La circonferenza descritta dal baricentro  $G$  di  $R$  ha quindi lunghezza  $C = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2$ . Il volume del solido di rotazione  $W$  che si ottiene ruotando  $R$  attorno all'asse  $y$  è dato da:

$$\text{Volume}(W) = 2\pi x_G \cdot \text{Area}(R) = \pi^2 \cdot 2 = 2\pi^2 \approx 19,74 .$$

Commento. Il “metodo dei gusci cilindrici” e i teoremi di Pappo-Guldino non sono (esplicitamente) previsti nel programma dei licei scientifici sperimentali (PNI, Brocca, ecc.).

<b>Livello di difficoltà:</b>	<input type="checkbox"/> basso	<input type="checkbox"/> medio	<input checked="" type="checkbox"/> alto
<b>E' in programma?</b>	<input type="checkbox"/> si'	<input checked="" type="checkbox"/> no	<input type="checkbox"/> non si fa
<b>Normalmente si fa a scuola?</b>	<input type="checkbox"/> si	<input checked="" type="checkbox"/> no	<input type="checkbox"/> non sempre
<b>E' un argomento presente nei libri di testo?</b>	<input type="checkbox"/> si	<input type="checkbox"/> mai	<input checked="" type="checkbox"/> non sempre
<b>Controlla una conoscenza / abilità /competenza fondamentale?</b>	<input type="checkbox"/> si'		<input checked="" type="checkbox"/> no
<b>Formulazione</b>	<input checked="" type="checkbox"/> molto chiara	<input type="checkbox"/> corretta	<input type="checkbox"/> poco chiara
		<input type="checkbox"/> ambigua	<input type="checkbox"/> scorretta