Esame di Stato Liceo Scientifico

Prova di Matematica corso di ordinamento - 21 giugno 2012

Soluzione del PROBLEMA 1 (a cura di S. De Stefani)

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = \left|27x^3\right| \quad e \quad g(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

Punto 1

Il periodo della funzione $g\left(x\right) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ è $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{3}$.

- Studio della funzione: $f\left(x\right) = \left|27x^3\right|$

Dominio: $\Re$

Simmetrie notevoli: $f\left(-x\right) = \left|-27x^3\right| = f\left(x\right)$, la funzione è pari.

Segno: $f(x) > 0$: $\left|27x^3\right| > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \neq 0$

Intersezioni con gli assi: Assi x e y: (0; 0)

Limiti e asintoti: $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = +\infty$

(non ci sono asintoti obliqui, essendo $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \infty$).

Studio della derivata prima per $x \geq 0$: $f'\left(x\right) = 81x^2$

Punti stazionari: $f'(x) = 0$ per $x = 0$

Intervalli di crescenza: $f'(x) > 0$ se $x \neq 0$

$x = 0$ è un punto di minimo assoluto

Studio della derivata seconda per $x > 0$: $f''(x) = 162x$

La funzione è convessa per ogni $x > 0$.

- Studio della funzione: $g(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$

Dominio: $\Re$

Simmetrie notevoli: $f(-x) = -f(x)$, la funzione è dispari

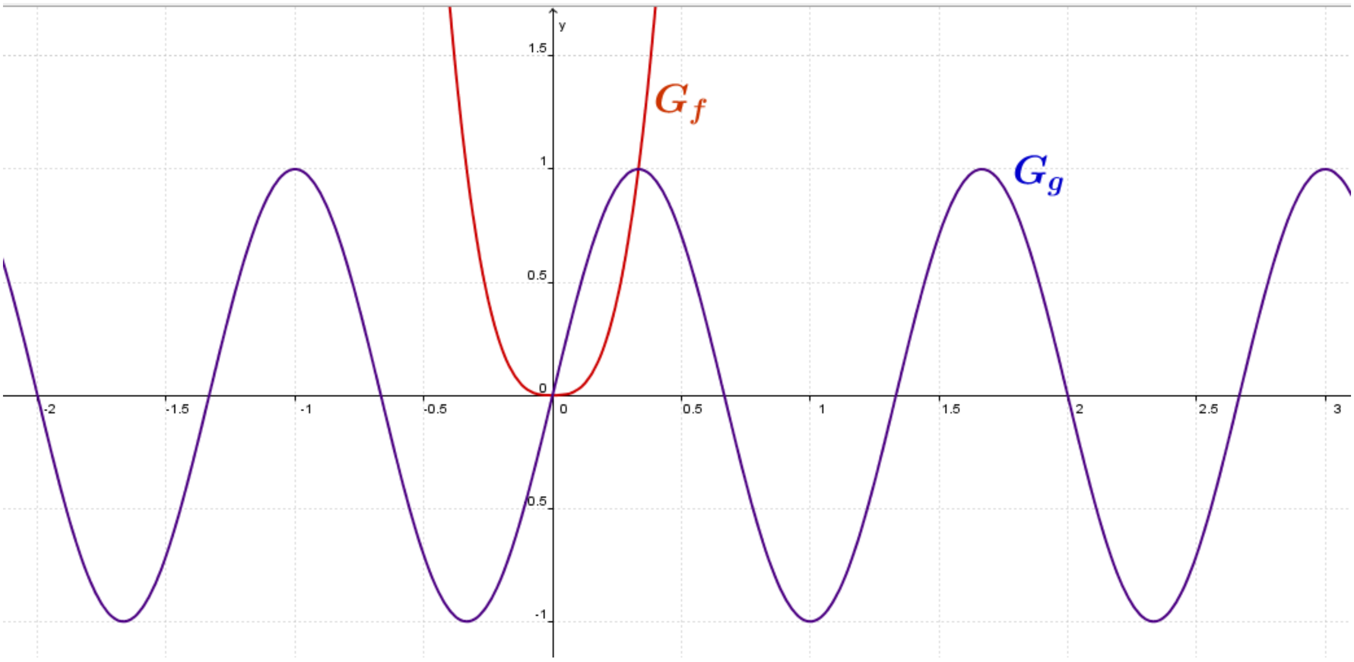
Segno: $f(x) > 0$ per $0 + \frac{4}{3}k < x < \frac{2}{3} + \frac{4}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Intersezioni con asse x: $\left(0 + \frac{2}{3}k; 0\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

Massimi e minimi:

Massimi in $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k; 1\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

minimi in $\left(1 + \frac{4}{3}k; -1\right), \quad k \in \mathbb{Z}$



Punto 2

Il punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$ ha ordinata $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|27 \cdot \frac{1}{27}\right| = 1$. La retta r tangente a G_f in $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, di coefficiente angolare $m_r = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 81 \cdot \frac{1}{9} = 9$, ha equazione $y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

$\boxed{r: \quad y = 9x - 2}$

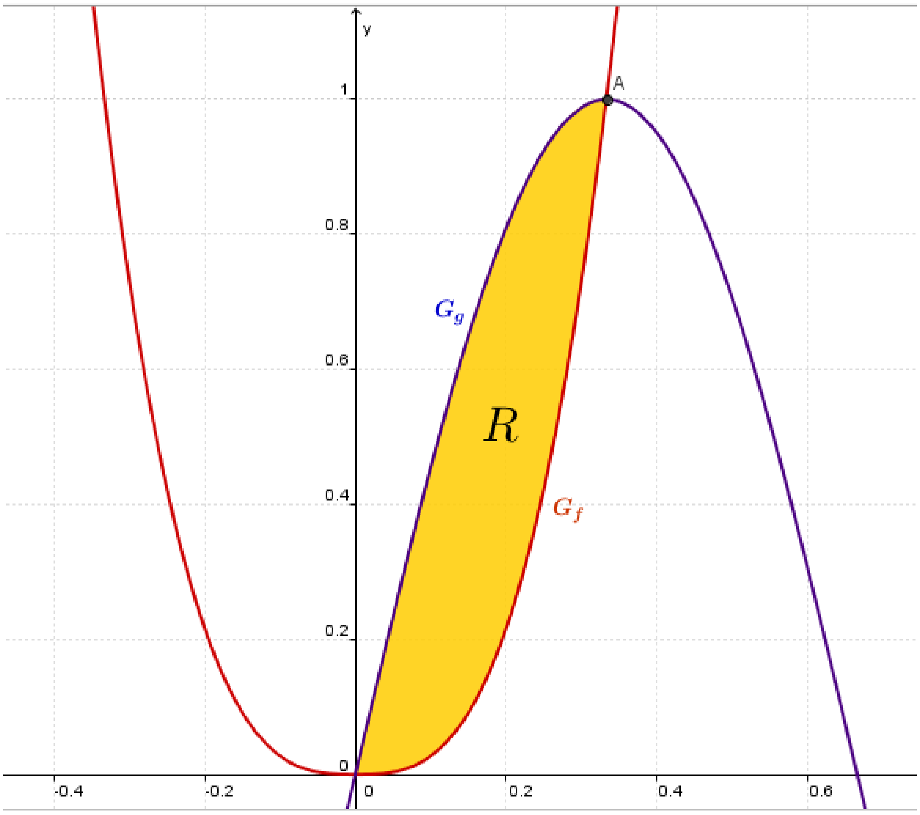
Il punto di ascissa $x=\frac{1}{3}$ ha ordinata $g\left(\frac{1}{3}\right)=sen\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. La retta s tangente a G_g in $\left(\frac{1}{3};1\right)$ ha coefficiente angolare $m_s=g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\pi\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)=0$, quindi è parallela all'asse *x*.

$\boxed{s:\quad y=1}$

L'angolo acuto α formato da *r* ed *s* è tale che: $tg\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_rm_s}\right|=\frac{9-0}{1+0}=9$, per cui $\alpha=arctg(9)\cong 83,6598$.

L'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle due rette è **83° 39′ 35″**.

Punto 3



Poiché le due funzioni si intersecano in $A\left(\frac{1}{3};1\right)$, l'area richiesta coincide con l'integrale da 0 a $\frac{1}{3}$ della differenza tra G_g e G_f, quindi:

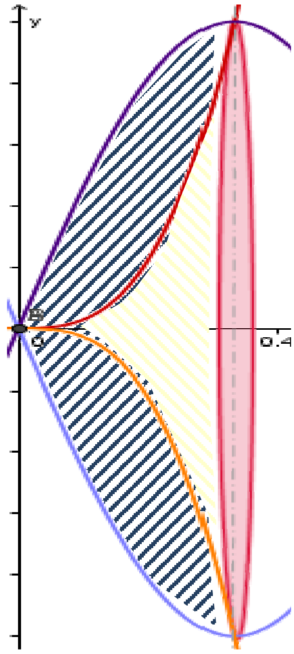
$$R=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27x^3\right)dx=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3\pi}-27\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{4}=$$

$$-\frac{2}{3\pi}\cdot 0+\frac{2}{3\pi}-\frac{1}{12}==\frac{8-\pi}{12\pi}\cong 0,13.$$

Punto 4

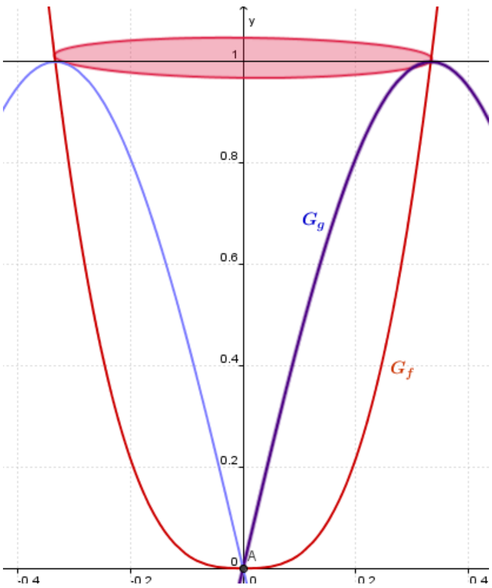
Il volume del solido che si ottiene facendo ruotare R attorno all'asse x è dato dall'integrale definito

$$S = \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} \left(sen^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6 \right) dx$$



Il volume del solido che si ottiene facendo ruotare R attorno all'asse y è dato dall'integrale definito calcolabile attraverso il "metodo dei gusci cilindrici":

$$T = 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(x \cdot g(x) - x \cdot f(x) \right) dx \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} \left(xsen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^4 \right) dx$$



Commento

Livello di difficoltà:	☐ basso ☒ medio ☐ alto
E' in programma?	☒ si' ☐ no ☐ di solito non si fa
Normalmente si fa a scuola?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
E' un argomento presente nei libri di testo?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
Controlla conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ si ☐ no
Formulazione	☐ molto chiara ☒ corretta ☐ poco chiara ☐ ambigua ☐ scorretta