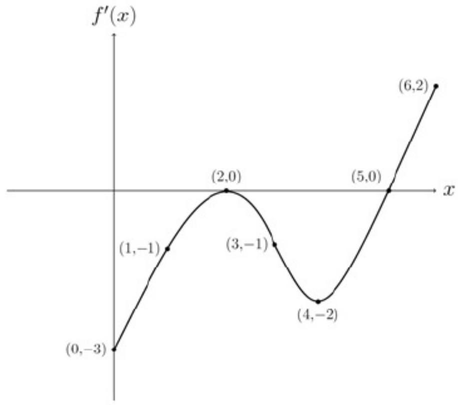
<u>PROBLEMA 1</u> (a cura di L. Rossi)

Della funzione f, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.

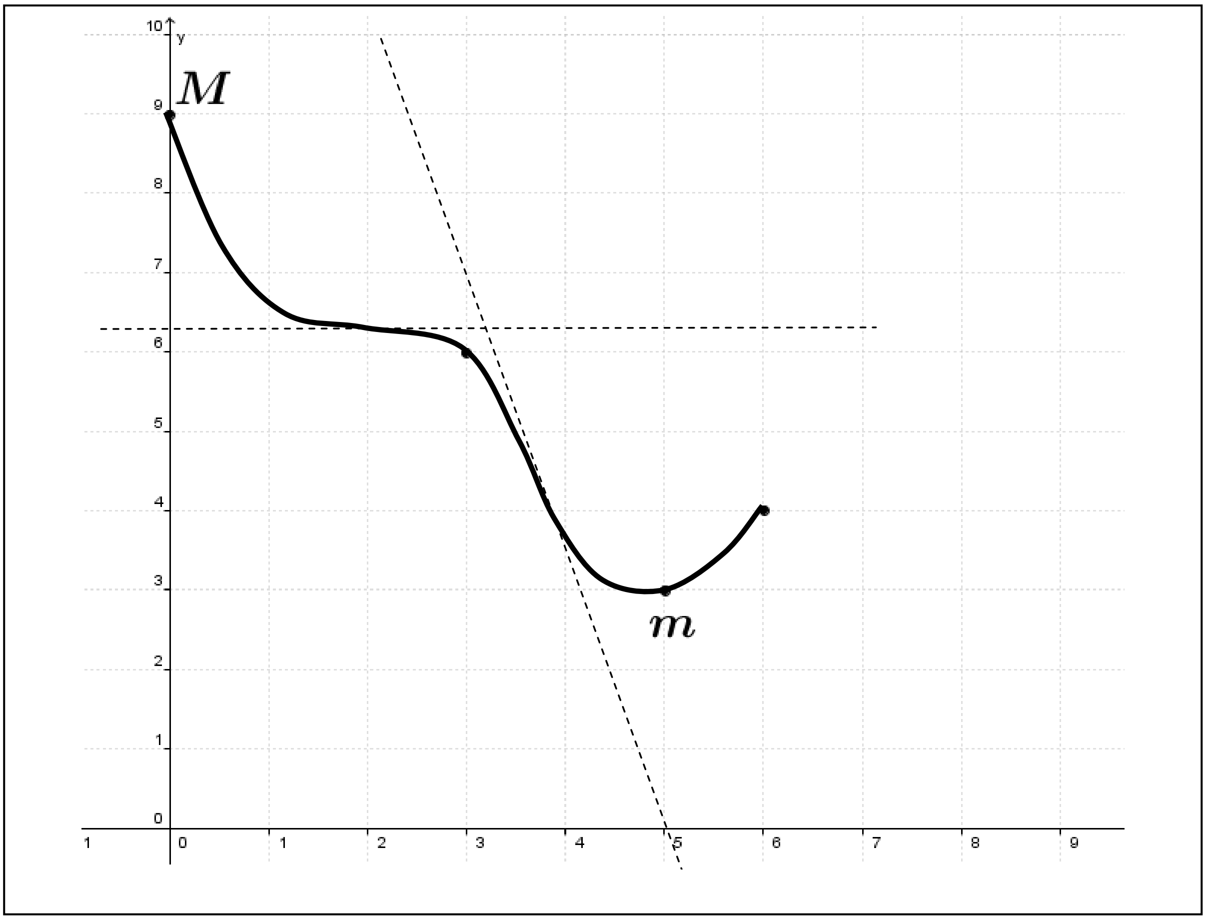


1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = x f(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

Punto 1:
Le ascisse dei punti di flesso di $f(x)$ sono gli zeri di $f''(x)$ tali che $f''(x)$ cambia segno nel relativo intorno; trattasi quindi degli estremanti di $f'(x)$ e sono $x = 2$ e $x = 4$.

Punto 2:
$f(x)$ presenta minimo assoluto in $x = 5$ infatti:
per $0 \le x < 2$ risulta $f'(x) < 0$ dunque $f(x)$ decrescente;
per $x = 2$ risulta $f'(x) = 0$ dunque $f(x)$ ha un punto stazionario di flesso a tangente orizzontale discendente;
per $2 < x < 5$ risulta $f'(x) < 0$ dunque $f(x)$ decrescente;
per $x = 5$ risulta $f'(x) = 0$ dunque $f(x)$ ha un punto stazionario di minimo assoluto poiché per $5 < x \le 6$ risulta $f'(x) > 0$ dunque $f(x)$ crescente.
Evidenziato l'andamento della funzione, essa assumerà massimo assoluto in $x = 0$ dove risulta $f(0) = 9$, infatti da $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ si ricava $f(6) - f(0) = -5$ ossia $f(6) = 4$.

Punto 3:



Punto 4:

$g(x) = x\,f(x),\;\; g'(x) = f(x) + xf'(x)$

$t_f: y - f(3) = f'(3)(x-3),\, y - 6 = -1\,(x-3),\, y = -x + 9$

$t_g: y - g(3) = g'(3)(x-3),\, y - 18 = 3\,(x-3),\, y = 3x + 9$

La tangente dell'angolo acuto formato dalle due rette vale $\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+m\,m'}\right| = \left|\frac{3+1}{1-3}\right| = 2.$

Dunque $\alpha = arctan2 \approx (63{,}4349)^{\circ} \approx 63°26'5''$

Commento

Livello di difficoltà:	☐ basso ☒ medio ☐ alto
E' in programma?	☒ si ☐ no ☐ di solito non si fa
Normalmente si fa a scuola?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
E' un argomento presente nei libri di testo?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
Controlla conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ si ☐ no
Formulazione	☐ molto chiara ☒ corretta ☐ poco chiara ☐ ambigua ☐ scorretta