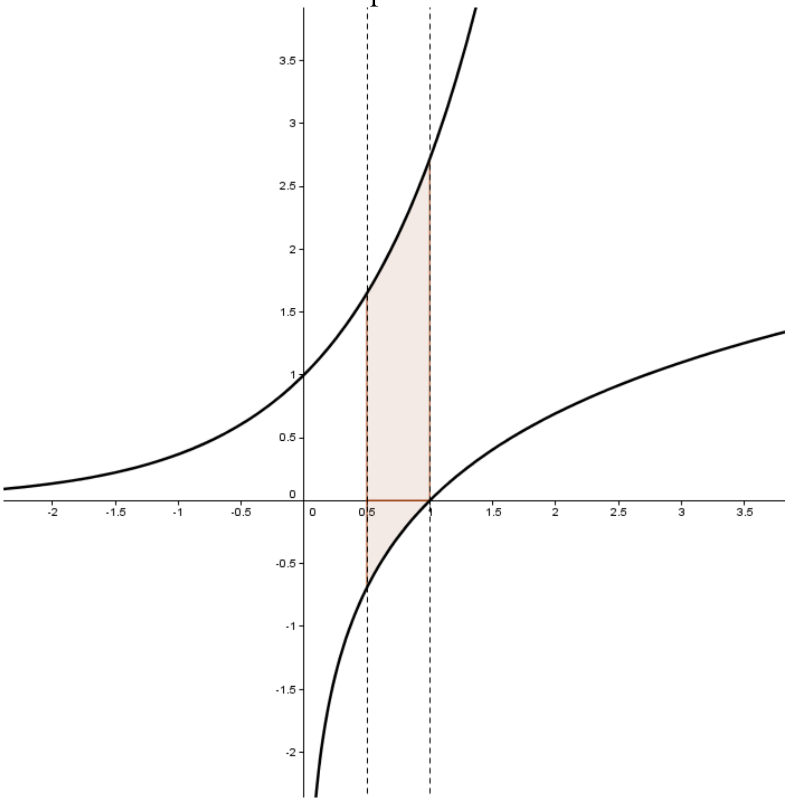
PROBLEMA 2 (a cura di L. Rossi)

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \le x \le 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Eseguiamo i grafici delle due curve nello stesso piano cartesiano e indichiamo la regione R.



Punto 1:

area regione R:

$$\int_{1/2}^{1} (e^x - \ln x)dx = [e^x - x\ln x + x]_{1/2}^{1} = e + 1 - \left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = e + \frac{1}{2} - \sqrt{e} - \frac{1}{2}\ln 2$$

essendo $\int (e^x - \ln x)dx = e^x - (x\ln x - x) + c, c \in R$.

Punto 2:

Volume solido S: $\pi \int_{1/2}^{1} (e^x)^2\, dx$.

Volume solido di rotazione = $\pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$

Volume solido T= $2\pi \int_{1/2}^{1} x(e^x - \ln x)dx$.

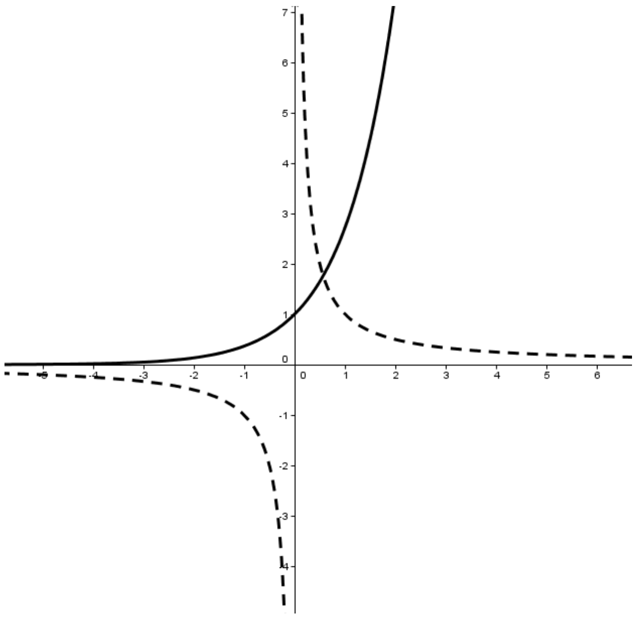
Metodo dei “gusci cilindrici” : $2\pi \int_a^b x f(x) dx$.

Punto 3:

$f'(x_0) = g'(x_0)$

$e^{x_0} = \dfrac{1}{x_0}$

Risoluzione grafica: $e^x = \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} y = e^x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$



Esiste ed è unico il punto di intersezione tra le due curve, l’ascissa di tale punto è il valore per cui risulta $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Per calcolare un’approssimazione arrotondata ai centesimi di x_0 applico il metodo delle tangenti per la risoluzione dell’equazione $e^x = \frac{1}{x}$ ossia $e^x - \frac{1}{x} = 0$.

L’equazione per l’osservazione precedente ammette un’unica soluzione, attraverso il teorema di Bolzano determino un intervallo di appartenenza di tale soluzione.

Sia $t(x) = e^x - \frac{1}{x}$, risulta $t\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, t(1) = e - 1 > 0$, dunque $x_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Applico il metodo delle tangenti con punto iniziale $x_0 = 1$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	1,7182818	3,7182818	0,537882847
1	0,537883	-0,146763254	5,168782532	0,56627701
2	0,566277	-0,004224142	4,880170127	0,567142583
3	0,567143	-3,4595E-06	4,8721841	0,567143293

$x_0 \sim 0{,}56$

Punto 4:

$h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x$

$h(x)$ è continua in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ poiché combinazione lineare di funzioni continue; quindi per il teorema di Weierstrass assume massimo e minimo assoluti.

$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$

$h'(x) = 0$ per $x = x_0$, $h'(x) > 0$ quando $e^x > \frac{1}{x}$, ossia come si osserva dal grafico precedente per $x > x_0$.

Dunque la funzione $h(x)$ assume minimo assoluto in x_0 e massimo assoluto in uno dei due estremi dell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, precisamente in 1 poiché $h(1) > h\left(\frac{1}{2}\right)$.

Commento 1

Livello di difficoltà:		☐ basso ☒ medio ☐ alto			
E' in programma?		☒ si'	☐ no	☐ di solito non si fa	
Normalmente si fa a scuola?		☒ si'	☐ no	☐ non sempre	
E' un argomento presente nei libri di testo?		☒ si'	☐ no	☐ non sempre	
Controlla conoscenze / abilità / competenze fondamentali?		☒ si'	☐ no		
Formulazione	☐ molto chiara	☒ corretta	☐ poco chiara	☐ ambigua	☐ scorretta

Commento 2

Il solido di rotazione S è piuttosto strano…; la richiesta andava scritta meglio; la domanda è quindi ambigua.