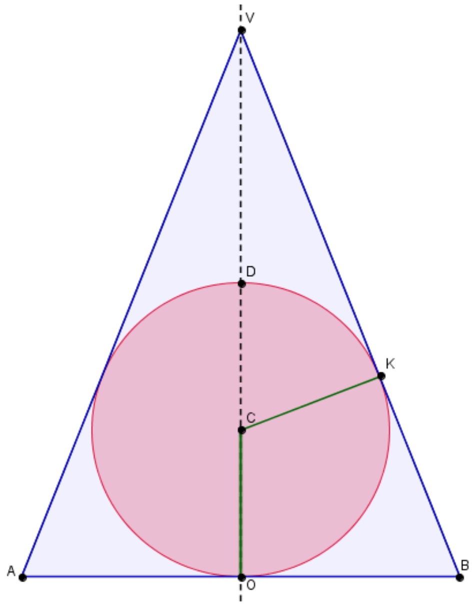
<u>QUESITO 10</u> (a cura di S. De Stefani)

10. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

La superficie laterale di un cono circolare retto è data da: $S = \dfrac{2\pi r \cdot a}{2} = \pi r a$.

Ponendo $DV = x \geq 0$ (= distanza del vertice del cono dalla sfera), si ha:



$$CK \simeq CO \simeq CD = r\,; \quad VO = 2r + x$$

$$VK = \sqrt{(r+x)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx}$$

I triangoli VCK e OBV sono simili, per cui:

$$\frac{OB}{CK} = \frac{VO}{VK} \Rightarrow OB = \frac{VO \cdot CK}{VK} = \frac{(2r+x)r}{\sqrt{x(x+2r)}} = \frac{r\sqrt{(2r+x)}}{\sqrt{x}}$$

Utilizzando Pitagora, si ha:

$$BV = \sqrt{OB^2 + OV^2} = \sqrt{\frac{(2r+x)r^2}{x} + (2r+x)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2r+x)(r^2+2rx+x^2)}{x}} = (r+x)\cdot\sqrt{\frac{2r+x}{x}} \Rightarrow$$

$$BV = (x+r)\sqrt{\frac{2r+x}{x}}$$

La superficie laterale del cono vale:

$$S = \pi \cdot OB \cdot BV = \pi \cdot \frac{r\sqrt{(2r+x)}}{\sqrt{x}} \cdot (x+r)\sqrt{\frac{2r+x}{x}} = \frac{(x+r)(2r+x)\pi r}{x} =$$

$$= \frac{x^2+3rx+2r^2}{x}\pi r = \pi r x + 3\pi r^2 + \frac{2\pi r^3}{x}.$$

Per individuare il minimo della funzione si calcola la derivata prima $y' = \pi r - \dfrac{2\pi r^3}{x^2} = \dfrac{\pi r x^2 - 2\pi r^3}{x^2}$

e se ne studia il segno; $y' = \dfrac{\pi r x^2 - 2\pi r^3}{x^2} > 0$ per $x > \sqrt{2}r$, la funzione presenta il minimo per $x = r\sqrt{2}$.

cvd

Commento

Livello di difficoltà:	☒ basso ☐ medio ☐ alto
E' in programma?	☒ si ☐ no ☐ di solito non si fa
Normalmente si fa a scuola?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
E' un argomento presente nei libri di testo?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
Controlla conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ si ☐ no
Formulazione	☐ molto chiara ☒ corretta ☐ poco chiara ☐ ambigua ☐ scorretta