

Esame di Stato Liceo Scientifico

Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 21 giugno 2012

Soluzione del QUESTIONARIO (a cura di L. Tomasi)

QUESITO 4

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Si riferisce la famoso “procedimento diagonale” di Cantor, in cui si dimostra l'equipotenza tra \mathbb{N} e \mathbb{Q} .

L'insieme dei numeri razionali è numerabile; i numeri reali hanno una cardinalità maggiore della cardinalità del numerabile. Nelle figure seguenti è riportata la dimostrazione che l'insieme dei numeri razionali assoluti è un insieme numerabile; la stessa dimostrazione può essere ripetuta per l'insieme dei numeri razionali relativi.

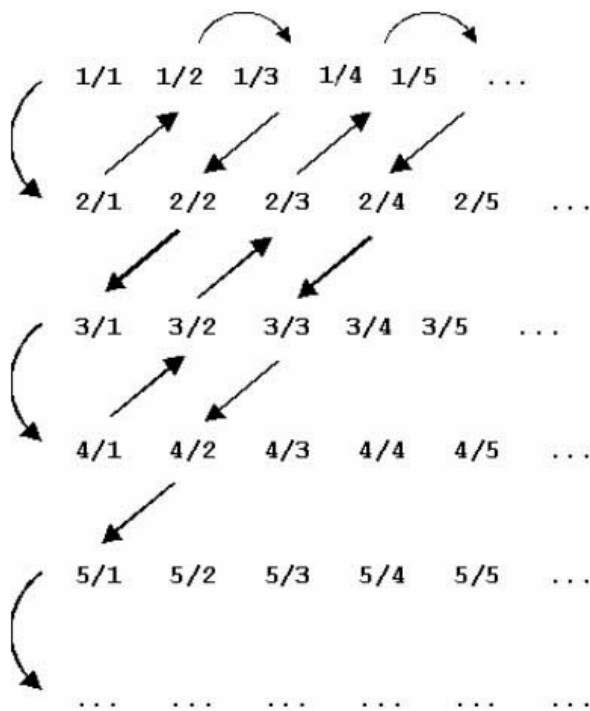
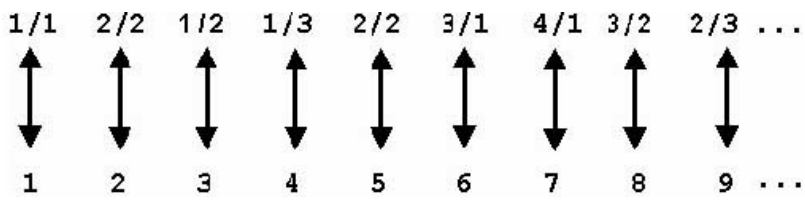


Figura 1

Nella prima riga vengono scritti tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore un numero naturale non nullo; nella seconda riga scriviamo tutte le frazioni con numeratore 2, e così via... In questo modo vengono scritti tutti i numeri razionali assoluti, eventualmente anche con delle ripetizioni. Le frecce indicate nella figura 1, che procedono in senso diagonale, mostrano la possibilità di mettere in una unica “fila” i numeri razionali assoluti.

Possiamo anche scrivere come indica la seguente figura, che indica una corrispondenza biunivoca tra i razionali assoluti ed i numeri naturali.



Quindi: *I numeri razionali sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali (i due insiemi hanno la stessa cardinalità).*

La cardinalità di questi due insiemi si indica con “aleph con 0” (Cantor).

\aleph_0

Commento

Questo quesito è difficile per una scuola secondaria di II grado e comunque è più adatto ad una prova orale piuttosto che in a una prova scritta.