

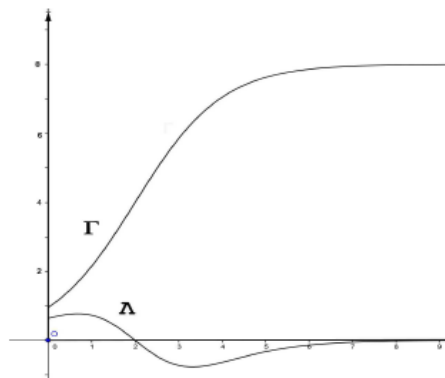
Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica - corso sperimentale PNI - 20 giugno 2013

Soluzione del PROBLEMA 1

a cura di S. De Stefani e L. Rossi

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$, passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ , rispettivamente.

- 1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?
- 2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
- 3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.
- 4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0, 2]$.



Punto 1

Da una lettura dei grafici di Γ e Λ possiamo dedurre quanto segue:

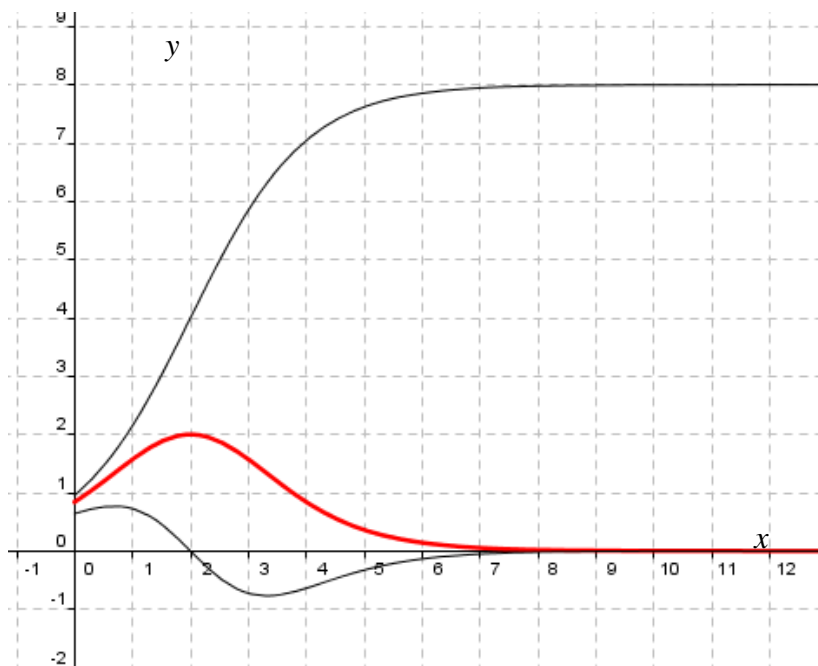
segno di $y = f(x)$: x

segno di $y = f''(x)$: x

in particolare dal segno di $y = f''(x)$ possiamo dedurre che la funzione $y = f'(x)$, di cui $y = f''(x)$ è la derivata prima, risulta crescente in $[0, 2]$ e decrescente in $[2, +\infty[$, quindi $y = f'(x)$ ha un massimo relativo (anche assoluto) in $x = 2$.

Risulta $f'(2) = 2$ essendo $f'(2)$ il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ in $x = 2$ e passando essa per O ($f'(2)$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(2, 4)$ e $(0, 0)$).

Il possibile andamento di $y = f'(x)$ tenendo conto delle osservazioni precedenti e del fatto che $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ è quello evidenziato in rosso in figura:



Punto 2

Il grafico Γ rappresenta una *curva logistica*, una curva che si incontra nello studio della dinamica delle popolazioni quando le risorse a disposizione della popolazione non sono illimitate. All'inizio la popolazione cresce molto in fretta, perché c'è abbondanza di risorse. In seguito le risorse diventano più scarse e la popolazione continua a crescere, ma con un tasso sempre più piccolo e tendente a zero. La derivata della funzione data rappresenta pertanto il tasso istantaneo di crescita della popolazione. Questo tasso tende progressivamente a zero. Il flesso rappresenta l'inversione di tendenza tra un tasso di crescita che aumenta sempre di più a un tasso di crescita che aumenta, ma sempre di meno.

Se sull'asse delle ordinate la popolazione fosse rappresentata in milioni, allora l'asintoto indicherebbe che la popolazione tende a stabilizzarsi verso gli 8 milioni di individui.

Punto 3

Della funzione $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$ si sa che:

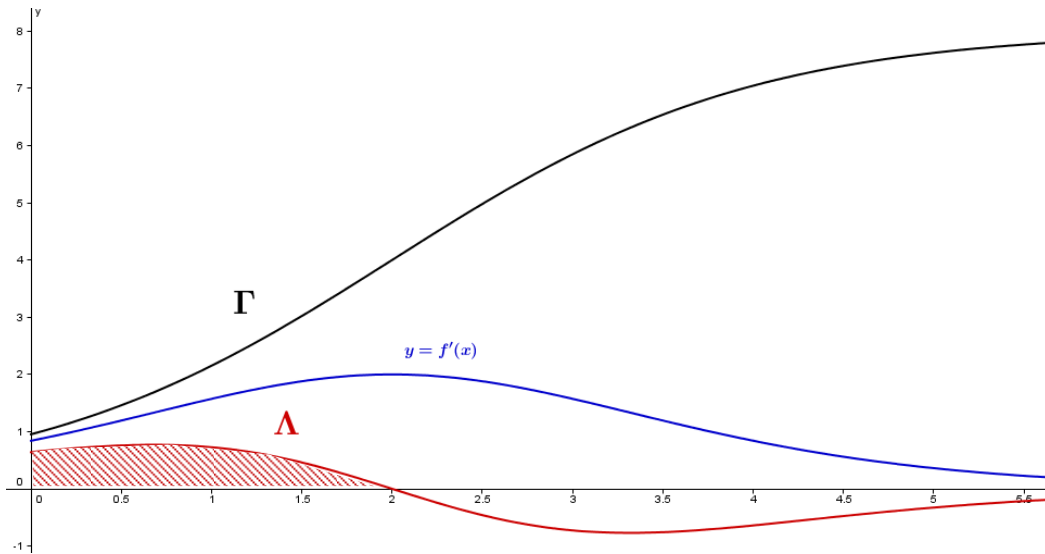
- $f(2) = 4$
- $y = 8$ asintoto orizzontale $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$

Mettendo a sistema le due condizioni si ha che:

$$\begin{cases} 4 = \frac{a}{1 + e^{b-2}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{1 + e^{b-x}} \right) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 4e^{b-2} = a \\ a = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ e^{b-2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$$

Punto 4

Sia $f(x) = \frac{8}{1+e^{2-x}}$. La sua derivata prima è $f'(x) = \frac{8e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}$.



L'area della regione di piano richiesta è:

$$A = \int_0^2 f''(x) dx = [f'(x)]_0^2 = \left[\frac{8e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2} \right]_0^2 = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}.$$

Giudizio

Livello di difficoltà:	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto		
È in programma nel liceo scientifico PNI?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non si sa		
Normalmente viene svolto?	<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	<input type="checkbox"/> Mai	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre		
Formulazione:	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/competenze fondamentali?	<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Sì		