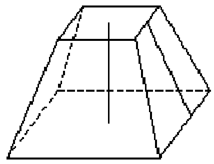
**Esame di Stato Liceo Scientifico**
**Prova di Matematica - Corso PNI - 20 giugno 2013**
**Soluzione del QUESTIONARIO** (a cura di S. De Stefani)

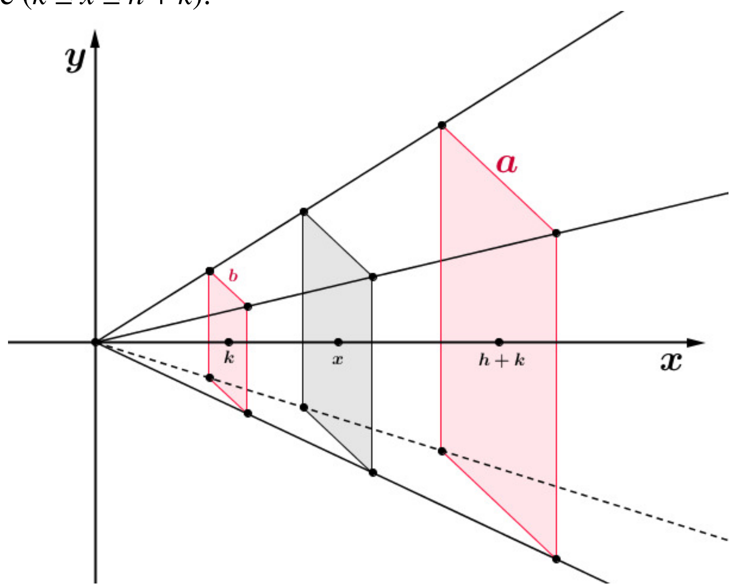


***QUESITO 4***

Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza $h$ e i lati $a$ e $b$ delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di $a$, $b$ e $h$, illustrando il ragionamento seguito.

1° *METODO (con il calcolo integrale):*

Si consideri la piramide retta di altezza $h + k$ e si prenda una qualsiasi sezione parallela alla base della piramide, ottenuta sezionando il tronco con un piano ortogonale all'asse delle ascisse e posto a distanza $x$ dal vertice ($k \le x \le h + k$):




Le aree delle sezioni sono proporzionali ai quadrati delle rispettive distanze dal vertice (sia α la costante di proporzionalità) $\Rightarrow$ $\dfrac{a^2}{(h+k)^2} = \dfrac{b^2}{k^2} = \alpha$, da cui $ab = \alpha k \cdot (h+k)$.

Si ha dunque: $Area_{\text{base minore}} = S(k) = \alpha k^2 = b^2$, $Area_{\text{base maggiore}} = S(h+k) = \alpha(h+k)^2 = a^2$,

in generale, $S(x) = \alpha x^2$.

Il volume richiesto è dato dalla risoluzione del seguente integrale definito:

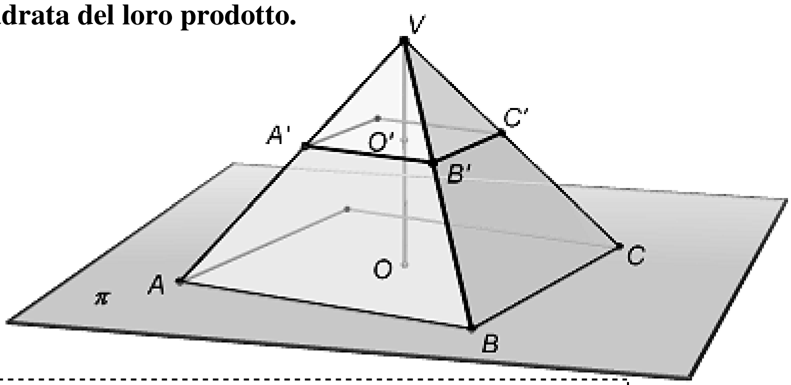
$$V = \int_k^{h+k} \alpha x^2 dx = \left[\alpha \cdot \frac{x^3}{3}\right]_k^{h+k} = \frac{\alpha}{3} \cdot \left[(h+k)^3 - k^3\right]$$

Scomponendo la differenza di cubi:

$$V = \frac{\alpha}{3} \cdot (h+k-k) \cdot \left[(h+k)^2 + k^2 + k \cdot (h+k)\right] = \frac{h}{3} \cdot \left[\alpha(h+k)^2 + \alpha k^2 + \alpha k \cdot (h+k)\right],$$

da cui: $$\boxed{V = \frac{h}{3} \cdot \left[a^2 + b^2 + ab\right]}$$

**Il *volume* di un tronco di piramide è uguale al prodotto di un terzo della sua altezza per la somma delle superfici delle due basi con la radice quadrata del loro prodotto.**




<u>*2° METODO (via geometrica):*</u>

Sia:

| | |
|---|---|
| $V$ = volume del tronco di piramide | $h$ = altezza del tronco di piramide |
| $a^2$ = superficie della base maggiore | $b^2$ = superficie della base minore |
| $x$ = distanza del vertice della piramide dalla base minore | |

Nota dalla geometria solida la formula per calcolare il volume di una piramide di superficie di base $A$ ed altezza $h$ $\left( Volume = \frac{1}{3} A \cdot h \right)$, il volume $V$ del tronco di piramide è dato dalla differenza tra il volume $V'$ della piramide "grande" e il volume $v$ della piramide "piccola":

$$V = V' - v = \frac{1}{3} a^2 \cdot (h + x) - \frac{1}{3} b^2 \cdot x$$

Raccogliendo: $$V = \frac{1}{3} \cdot \left[ a^2 h + \left( a^2 - b^2 \right) x \right] \qquad \textbf{(1)}$$

Essendo la piramide *piccola* **simile** alla piramide *grande*, si ha:

$$a : b = (h + x) : x \overset{\substack{\textit{proprietà} \\ \textit{dello} \\ \textit{scomporre}}}{\Leftrightarrow} (a - b) : b = (h + x - x) : x \quad \rightarrow$$

$$(a - b) : b = h : x \quad \rightarrow \quad x = \frac{b \cdot h}{a - b}$$

Andando a sostituire nella **(1)**, si ha:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[ a^2 h + \left( a^2 - b^2 \right) \frac{b \cdot h}{a - b} \right] = \frac{1}{3} h \cdot \left[ a^2 + (a + b) \cdot b \right],$$ quindi:

$$\boxed{V = \frac{h}{3} \cdot \left( a^2 + b^2 + ab \right)}$$

Giudizio

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Livello di difficoltà:** | ☐ Basso | | ☒ Medio | | ☐ Alto |
| **È in programma nel liceo scientifico di ordinamento?** | ☒ Si’ | | ☐ No | | ☐ Non si sa |
| **Normalmente viene svolto?** | ☐ Si’ | | ☐ No | | ☒ Non sempre |
| **È un argomento presente nei libri di testo?** | ☐ Mai | | ☒ Non sempre | | ☐ Sempre |
| **Formulazione:** | ☐ Scorretta | ☐ Ambigua | ☐ Poco chiara | ☒ Corretta | ☐ Molto chiara |
| **Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?** | ☒ No | | | ☐ Si’ | |