



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

La circonferenza  $\Sigma_1$  di centro C e raggio  $a=1$ , appartiene al semipiano delle  $y$  positive ed è tangente all'asse  $x$  nell'origine O del sistema di riferimento.

1. Da un punto P dell'asse  $x$ , distinto da O, si conduca l'ulteriore tangente a  $\Sigma_1$  e si indichi con T il punto di tangenza. Successivamente, si consideri la circonferenza  $\Sigma_2$  tangente esternamente a  $\Sigma_1$  nel punto T e tangente altresì all'asse  $x$  in un punto A; si denoti con B il centro di  $\Sigma_2$  e con b il suo raggio. Si dimostri che i triangoli OTA e CPB sono entrambi rettangoli e che  $OP^2 = ab$ .
2. Qual è il luogo geometrico descritto da B al variare di P sull'asse  $x$ ?
3. Sia  $f(x) = |x|(x^2 + 1)$ . Si mostri che  $f(x)$  esprime l'area S del quadrilatero OABC in funzione dell'ascissa  $x$  di P.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da  $\Gamma$  e dalle rette di equazione  $y = x$  e  $y = -x + 3$ .

**PROBLEMA 2**

Si consideri, in un riferimento cartesiano  $Oxy$ , la funzione  $f(x) = x(x-1)(x-k)$  con  $k \in \mathbb{R}$ .

1. Si dica come varia il grafico di  $f(x)$  al variare di  $k$  ( $k \leq 0$ ,  $0 < k \leq 1$ ,  $k > 1$ ).
2. Per quali valori di  $k$  le due regioni delimitate dal grafico di  $f(x)$  e dall'asse  $x$  (una posta al di sopra, l'altra al di sotto dell'asse  $x$ ) hanno aree uguali?
3. Si ponga  $k=2$  e sia  $\Gamma$  il grafico corrispondente. Preso un punto P di  $\Gamma$  avente ascissa compresa tra 0 e 1, si indichino con Q e R le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate. L'area e il perimetro del rettangolo OQPR ammettono entrambi un valore massimo?
4. Sia R la regione finita delimitata da  $\Gamma$  e dalla retta  $t$  tangente a  $\Gamma$  nell'origine O. Si consideri il solido W di base R, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono tutti semicerchi i cui diametri hanno gli estremi uno su  $t$  l'altro su  $\Gamma$ . Qual è l'altezza massima del solido W? Si calcoli il volume di W.



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

**QUESTIONARIO**

1. Si determini, se esiste, un cono circolare retto tale che il suo volume e la sua superficie totale abbiano lo stesso valore numerico.

2. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} 3x)}{\ln(\operatorname{sen} x)}$$

3. Si trovi un polinomio di terzo grado  $p(x)$  che si annulli per  $x = -3$  e tale che la retta tangente alla curva  $y = p(x)$  nel suo punto di ascissa zero abbia equazione  $2x + y - 6 = 0$ .

4. Lo sviluppo della potenza  $(x^3 + y^k)^{20}$  contiene il termine la cui parte letterale è:  $x^{21}y^{26}$ . Si trovi il valore di  $k$ .

5. Una targa d'argento ha la forma di un rettangolo di area  $600 \text{ cm}^2$ . La zona dove va incisa l'iscrizione è anch'essa rettangolare ed è posta a 2 cm sia dal lato superiore sia dal lato inferiore della targa, lasciando inoltre un bordo di 3 cm a sinistra e di 3 cm a destra. Si determinino le dimensioni della targa in modo che sia massima l'area della zona dedicata all'incisione e si calcoli la percentuale dell'area totale da essa occupata.

6. Si spieghi perchè le facce di un poliedro regolare sono tutti triangoli, tutti quadrati o tutti pentagoni.

7. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli di un triangolo i cui lati misurano 10, 24 e 26 decimetri.

8. Siano  $x_1$  e  $x_2$  gli zeri di  $P(x) = x^2 - x - 2014$ , con  $x_1 < x_2$ . Siano  $x_3$  e  $x_4$  gli zeri di  $Q(x) = x^2 - 2x - 2014$  con  $x_3 < x_4$ . Si calcoli  $(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1)$ .

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.