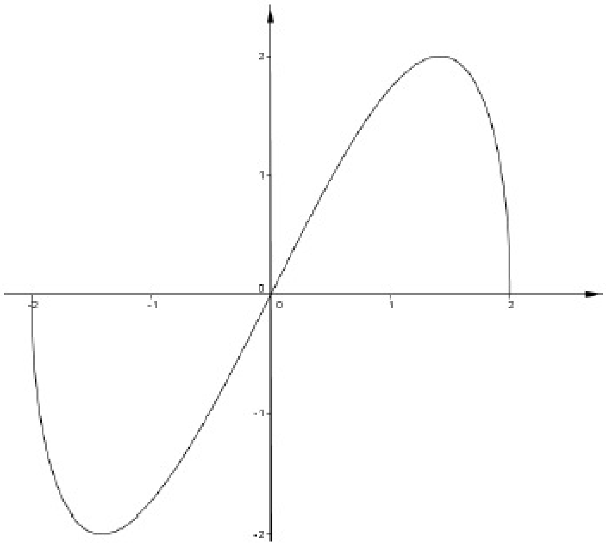
Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica - Corso di Ordinamento - 19 giugno 2014
a cura di S. De Stefani

PROBLEMA 2

PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

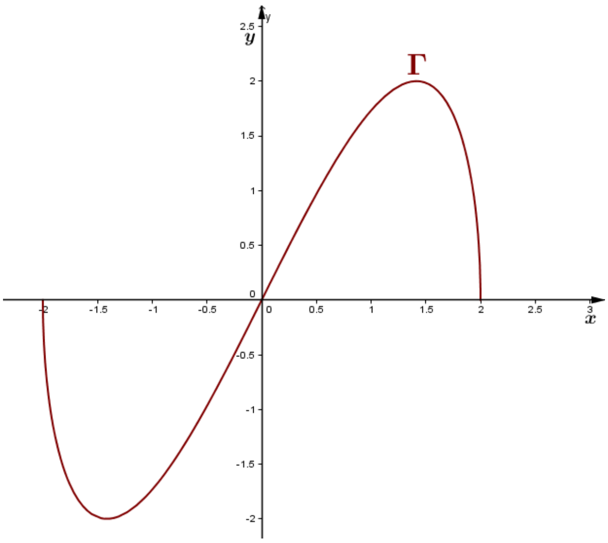
$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$



1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x) = sen(f(x))$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

Soluzione del PROBLEMA 2

$$\Gamma : f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$



Punto 1

- Dominio della funzione: $[-2; 2]$.

- Intersezione con gli assi cartesiani nei punti: $A(2;0)$, $B(-2;0)$ e $O(0;0)$.
- Studio del segno della derivata prima per la ricerca dei punti stazionari:

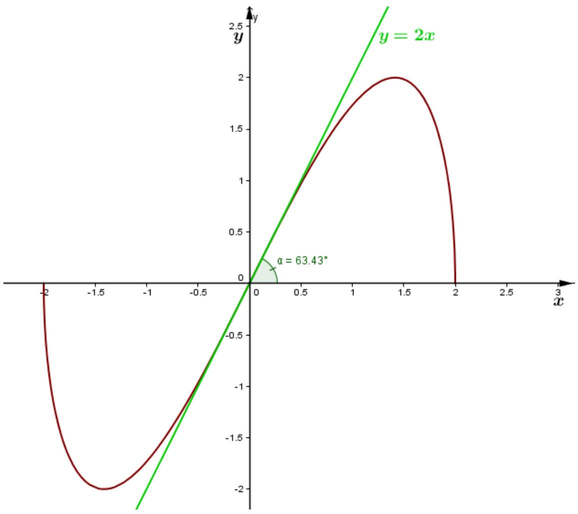
$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)>0:\ 4-2x^2>0 \qquad \longrightarrow \qquad x^2<2,\ \text{da cui } -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.$$

La funzione presenta un minimo assoluto in $N\left(-\sqrt{2};-2\right)$ ed un massimo assoluto in $M\left(\sqrt{2};2\right)$.

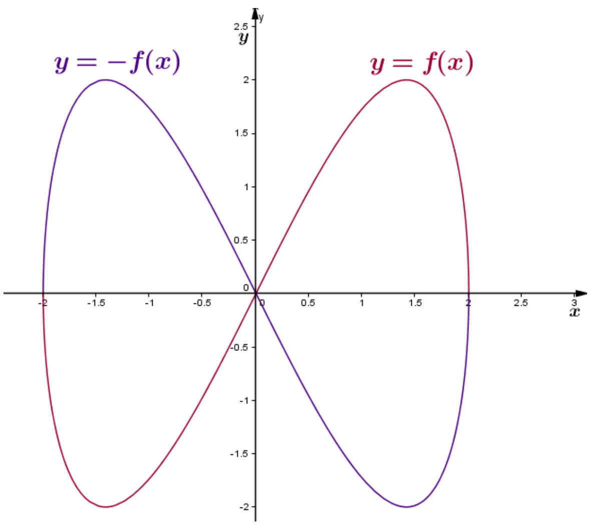
Punto 2

La funzione è dispari $\left(f(-x)=-f(x)\right)$, perciò il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi. L'origine O è dunque centro di simmetria per Γ.
L'angolo α formato dalla retta tangente a Γ in O è tale che $tg\alpha=m=f'(0)$.
Si ha che $f'(0)=2$, da cui $\alpha=arctg2\cong 63,4349...$
L'ampiezza dell'angolo formato dalla retta tangente a Γ in O è di $63°26'$.



Punto 3

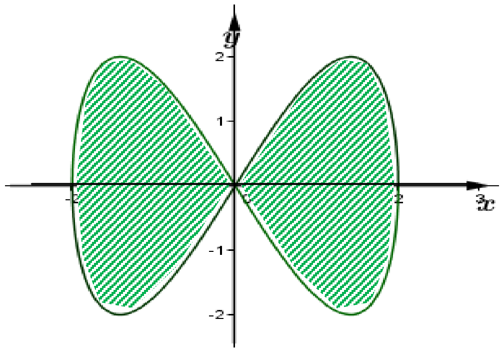
La curva di equazione $y^2=x^2\cdot\left(4-x^2\right)$ è data dall'unione dei grafici delle due funzioni $y=f(x)$ e $y=-f(x)$ (simmetrica di Γ rispetto all'asse x). Si avrà:



Essendo tale curva simmetrica rispetto ai due assi cartesiani, l'area richiesta è il quadruplo della regione di piano situata nel I quadrante compresa tra Γ e l'asse *x*:

$$A = 4 \cdot \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -2\int_0^2 (-2x)\cdot\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= -2\left[\frac{2}{3}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}\right]_0^2 = -2\left(0-\frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) = \frac{32}{3}.$$



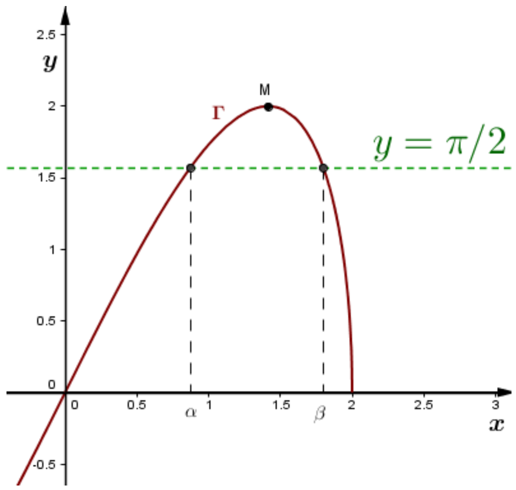
Punto 4

Analizzando la funzione $h(x) = sen(f(x))$, con $0 \le x \le 2$:

- Intersezioni con gli assi: $O(0;0)$ e $A(2;0)$.
- Studio del segno della derivata prima
  $$h'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \cos\left(x\sqrt{4-x^2}\right) > 0$$

Il primo fattore è positivo per $0 \le x < \sqrt{2}$, il secondo fattore è positivo per x tali che $f(x) < \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57$.

Si ha $f(x) = \frac{\pi}{2}$ per $x = \alpha$, con $0 < \alpha < \sqrt{2}$ e per $x = \beta$, con $\sqrt{2} < \beta < 2$.

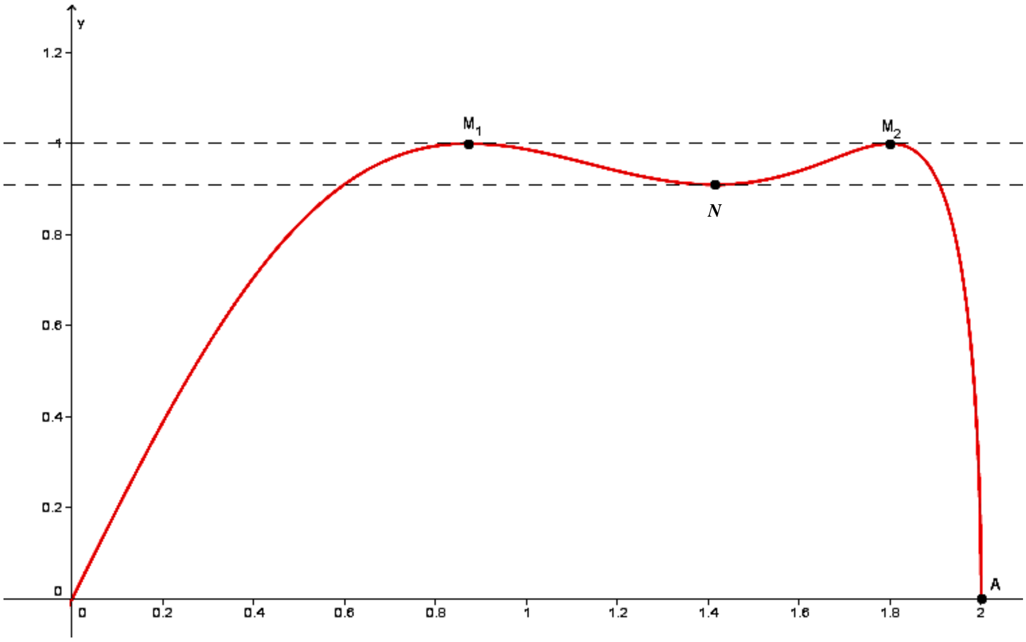


Il segno di $h'(x)$ è:

	$0 \to \alpha$	$\alpha \to \sqrt{2}$	$\sqrt{2} \to \beta$	$\beta \to 2$
	+	+	−	−
	+	−	−	+
f'	+	−	+	−
f	↗	↘	↗	↘

Si ha che $h(\alpha)=h(\beta)=sen\frac{\pi}{2}=1$, $h(2)=sen2\cong 0,9$.

La funzione presenta due minimi assoluti nei punti $O(0;0)$ e $A(2;0)$ ed un minimo relativo in $N\left(\sqrt{2};\, sen2\right)$, e due massimi assoluti in $M_1(\alpha;1)$ e $M_2(\beta;1)$.



Dal grafico si deduce che le rette del fascio $y=k$ (parallele all'asse x) intersecano la funzione in quattro punti distinti per i valori di k compresi tra l'ordinata del punto di minimo relativo e le ordinate dei punti di massimo assoluto.

L'equazione $h(x)=k$ ha dunque 4 soluzioni distinte per $sen2<k<1$.

Livello di difficoltà:	☐ Basso		☒ Medio		☐ Alto
È in programma nel liceo scientifico di ordinamento?	☒ Si		☐ No		☐ Non si sa
Normalmente viene svolto?	☒ Si		☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai		☐ Non sempre		☒ Sempre
Formulazione:	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?	☐ Si		☒ No		