Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica - Corso di Ordinamento - 19 giugno 2014

Soluzione del QUESTIONARIO

QUESITO 8

8. Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x=2$ e $x=3$ e, ancora, che $P(1)=0$. Si calcoli $P(4)$.

1° modo

Sia $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ il polinomio di quarto grado di cui si sa che:

$$P(2)=P(3)=3, \qquad P'(2)=P'(3)=0, \qquad P(1)=0.$$

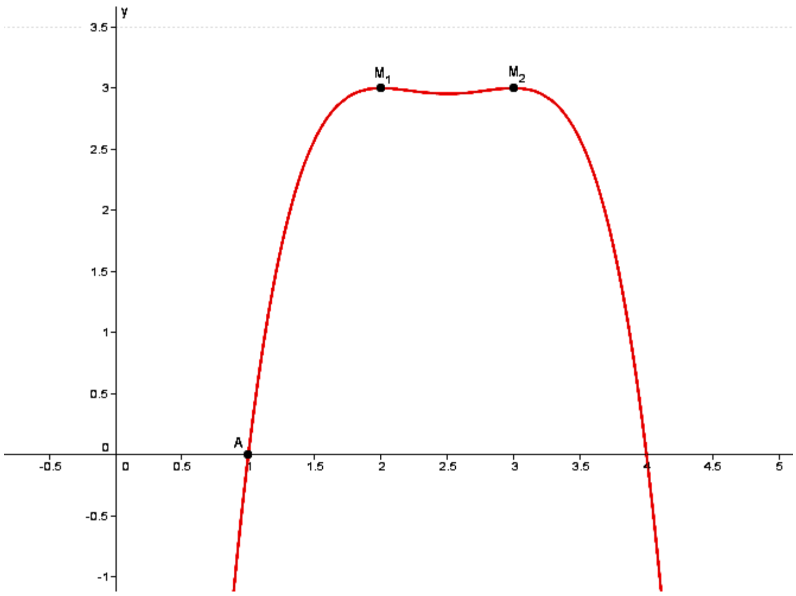
Essendo $P'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$, si ha che:

$$\begin{cases} P(2)=3 & \Rightarrow & 16a+8b+4c+2d+e=3 \\ P(3)=3 & \Rightarrow & 81a+27b+9c+3d+e=3 \\ P'(2)=0 & \Rightarrow & 32a+12b+4c+d=0 \\ P'(3)=0 & \Rightarrow & 108a+27b+6c+d=0 \\ P(1)=0 & \Rightarrow & a+b+c+d+e=0 \end{cases} \quad , \qquad \text{quindi} \qquad \begin{cases} 16a+8b+4c+2d+e=3 \\ 81a+27b+9c+3d+e=3 \\ 32a+12b+4c+d=0 \\ 108a+27b+6c+d=0 \\ a+b+c+d+e=0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene che $a=-\frac{3}{4}$, $b=\frac{15}{2}$, $c=-\frac{111}{4}$, $d=45$, $e=-24$, per cui:

$$\boxed{P(x)=-\frac{3}{4}x^4+\frac{15}{2}x^3-\frac{111}{4}x^2+45x-24}$$

In particolare, $P(4)=-\frac{3}{4}\cdot 256+\frac{15}{2}\cdot 64-\frac{111}{4}\cdot 16+45\cdot 4-24=0$.



2° modo

Dalle informazioni iniziali, sapendo che la funzione polinomiale (di quarto grado) presenta due massimi di ascisse rispettivamente $x = 2$ e $x = 3$ e di uguale ordinata, si deduce che il suo grafico dovrà essere simmetrico rispetto alla retta $x = \frac{5}{2}$ (ascissa del punto di minimo). Di conseguenza, sapendo che $P(1) = 0$, si avrà che anche $P(4) = 0$.

3° modo (soluzione proposta da F. Ciraulo)

Da $P(2) = P(3) = 3$ si deduce che 2 e 3 sono radici di $P(x) - 3$; quindi

$Q(x) = P(x) - 3 = (ax^2 + bx + c)(x-2)(x-3) = (ax^2 + bx + c)(x^2 - 5x + 6)$

con *a, b* e *c* da determinare.

Derivando si ha $Q'(x) = P'(x) = (2ax + b)(x-2)(x-3) + (ax^2 + bx + c)(2x-5)$.

Ma $P'(2) = P'(3) = 0$, da cui si deduce che 2 e 3 devono essere radici di $ax^2 + bx + c$, che sarà quindi della forma $k(x-2)(x-3)$.

Pertanto $Q(x) = P(x) - 3 = k(x-2)^2(x-3)^2$.

Imponendo $P(1) = 0$, si ricava $k = -\frac{3}{4}$ e $P(4) = 0$ e si ha infine

$P(x) = Q(x) + 3 = -\frac{3}{4}(x-2)^2(x-3)^2 + 3$.

Oppure si può prima mostrare che $P(5-x) = P(x)$ senza determinare *k* e concludere direttamente che *P*(4)=*P*(1)=0.

Livello di difficoltà:	☐ Basso	☒ Medio		☐ Alto	
È in programma nel liceo scientifico di ordinamento?	☒ Si	☐ No		☐ Non si sa	
Normalmente viene svolto?	☒ Si	☐ No		☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai	☐ Non sempre		☒ Sempre	
Formulazione:	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?	☒ Si		☐ No		