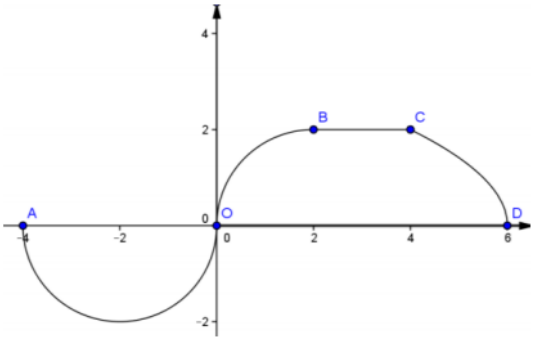
Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica - Corso sperimentale PNI - 19 giugno 2014
a cura di L. Rossi

PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4,6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4;0)$, $O(0;0)$, $B(2;2)$, $C(4;2)$, $D(6;0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.



1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.
2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)\,dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4,6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

Soluzione del PROBLEMA 1

Punto 1

Nei punti estremi del grafico o di "raccordo" A, O, B, C, D, la funzione è derivabile solo nel punto B.
La funzione è esprimibile analiticamente a tratti nel modo seguente:

$$g(x)=\begin{cases} -\sqrt{4-(x+2)^2} & -4 \le x < 0 \\ \sqrt{4-(x-2)^2} & 0 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 4 \\ \sqrt{12-2x} & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

e la sua derivata è

$$g'(x)=\begin{cases} -\dfrac{x+2}{\sqrt{4-(x+2)^2}} & -4 < x < 0 \\ \dfrac{2-x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 \le x < 4 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{12-2x}} & 4 < x < 6 \end{cases}$$

Nel punto A la funzione $g(x)$ non è derivabile infatti $\lim_{x \to -4^+}\left[-\dfrac{x+2}{\sqrt{4-(x+2)^2}}\right]=-\infty$ (la tangente destra al grafico della funzione è parallela all'asse y).

Nel punto O la funzione $g(x)$ non è derivabile (O è un punto di flesso a tangente verticale); infatti:

$$\lim_{x \to 0^-}\left[-\frac{x+2}{\sqrt{4-(x+2)^2}}\right]=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+}\left[-\frac{x+2}{\sqrt{4-(x+2)^2}}\right]=+\infty .$$

Nel punto B $g(x)$ è derivabile; infatti:

$$\lim_{x \to 2^-} \left[\frac{2-x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \right] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^+} g'(x) = \lim_{x \to 2^+} 0 = 0 .$$

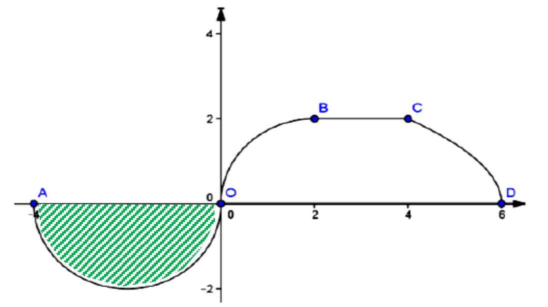
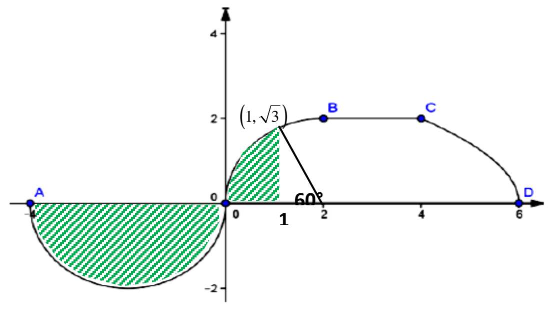
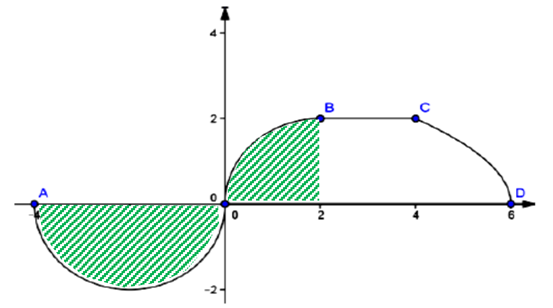
Nel punto C la funzione $g(x)$ non è derivabile (punto angoloso); infatti:

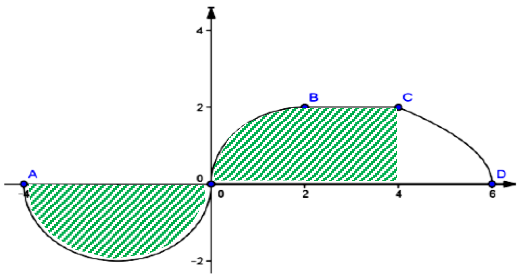
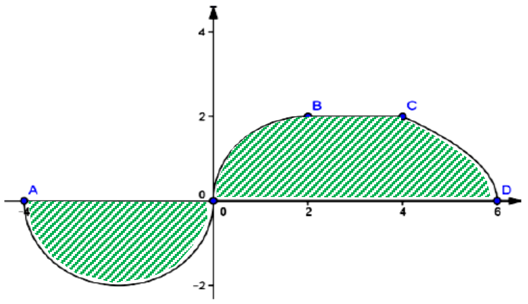
$$\lim_{x \to 4^-} g'(x) = \lim_{x \to 4^-} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 4^+} \left(-\frac{1}{\sqrt{12-2x}} \right) = -\frac{1}{2} .$$

Nel punto D la funzione $g(x)$ non è derivabile; infatti $\lim_{x \to 6^-} \left[-\frac{1}{\sqrt{12-2x}} \right] = -\infty$ (la tangente sinistra al grafico della funzione è parallela all'asse y).

<u>Punto 2</u>

$f(-4) = \int_{-4}^{-4} g(t)dt = 0$ (per definizione)

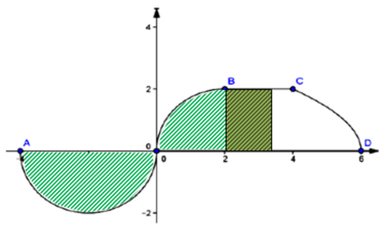
$f(0) = \int_{-4}^{0} g(t)dt = -2\pi$ (opposto dell'area del semicerchio di centro (-2,0) e raggio 2)	
$f(1) = \int_{-4}^{1} g(t)dt = -2\pi + \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($f(0)$ + area settore circolare di angolo 60° privato del triangolo rettangolo di cateti 1 e $\sqrt{3}$)	
$f(2) = \int_{-4}^{2} g(t)dt = -\pi$ ($f(0)$+ area quarto di cerchio di centro (2,0) e raggio 2)	

$f(4)=\int_{-4}^{4} g(t)dt=-\pi+4$ ($f(2)+$ area quadrato lato 2)	
$f(6)=\int_{-4}^{6} g(t)dt=-\pi+4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}-\pi$ ($f(4)+$ area metà segmento parabolico inscritto nel rettangolo di dimensioni 4 e 2)	

Punto 3

$f(x)=0 \quad$ per $x=-4 \vee x=2+\frac{\pi}{2}$

infatti per le considerazioni precedenti $f(2)<0 \wedge f(4)>0$, f è continua, dunque f si annullerà in corrispondenza di un valore α compreso tra 2 e 4 in modo tale che l'area del rettangolo di altezza 2 sia pari a π, essendo $f(2)=-\pi$; tale rettangolo deve avere base $\frac{\pi}{2}$, dunque $\alpha=2+\frac{\pi}{2}$.



$f(x)>0 \quad$ per $2+\frac{\pi}{2}<x\leq 6$

$f(x)<0 \quad$ per $-4<x<2+\frac{\pi}{2}$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $f'(x)=g(x) \ \forall x\in[-4,6]$; dal grafico di $y=g(x)$ si deduce che:

$f''(x)=0 \quad$ per $x=-2 \vee 2\leq x<4$

$f''(x)>0 \quad$ per $-2<x<0 \vee 0<x<2$

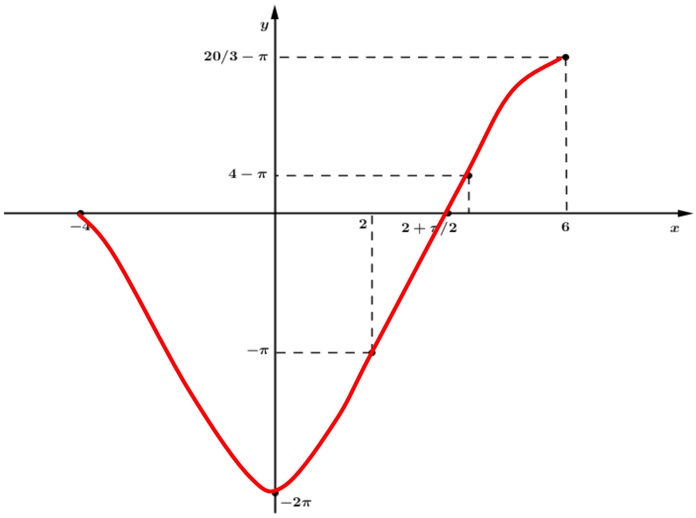
$f''(x)<0 \quad$ per $-4<x<-2 \vee 4<x<6$.

Punto 4

Riepilogando le considerazioni fatte in precedenza sulla funzione, $f(x)$ è continua in $[-4,6]$; essa ammette in tale intervallo massimo e minimo assoluti (per il teorema di Weierstrass).

È decrescente in $[-4,0]$, assume valore minimo assoluto in $x=0$ e tale minimo vale -2π; poi è crescente in $[0,6]$, si annulla in $x=2+\dfrac{\pi}{2}$ ed è positiva in $\left]2+\dfrac{\pi}{2},6\right]$, assume valore massimo assoluto in $x=6$ e tale massimo vale $\dfrac{20}{3}-\pi$.

Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente:



Livello di difficoltà:	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto
È in programma nel liceo scientifico PNI?	☒ Sì	☐ No	☐ Non si sa
Normalmente viene svolto?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai	☐ Non sempre	☒ Sempre

Formulazione:	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara

Controlla conoscenze/abilità/competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ No