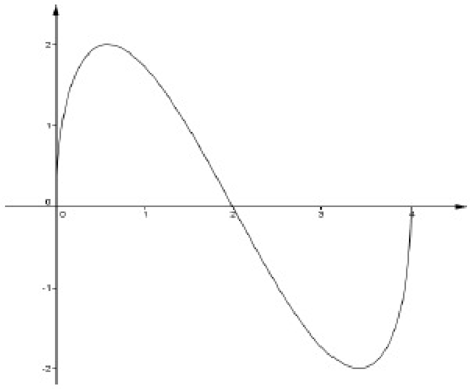
Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica - Corso sperimentale PNI - 19 giugno 2014
a cura di S. De Stefani

PROBLEMA 2

Sia $f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$

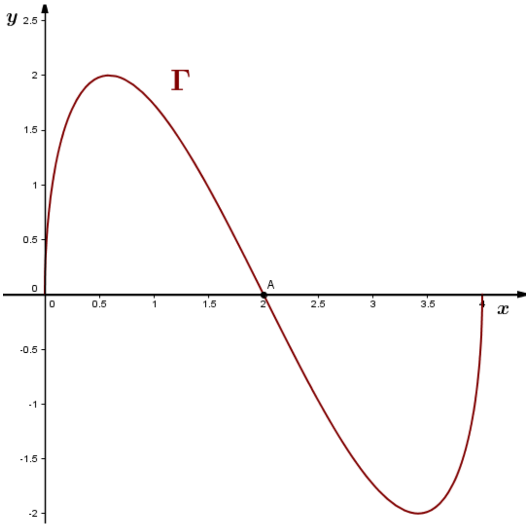
1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2;0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
2. Si dimostri che, qualunque sia t, $0<t<2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2+t$ e $2-t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x+10y+31=0$? E che siano parallele alla retta $23x+12y+35=0$?



3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x.
4. Sia $h(x)=sen(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x)\,dx$?

Soluzione del PROBLEMA 2

$$\Gamma: f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$$



Punto 1

Il punto $A(2;0)$ è centro di simmetria per Γ se nel sistema di riferimento cartesiano di origine il punto A (e con gli assi paralleli agli assi x, y) la funzione risulta dispari.

La funzione $y=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$, con la traslazione di assi $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y \end{cases}$, diventa:

$$Y=(2-X-2)\cdot\sqrt{4(X+2)-(X+2)^2}=-X\cdot\sqrt{4X+8-X^2-4-4X}=-X\cdot\sqrt{4-X^2}.$$

La funzione così ottenuta è dispari $\left(f(-X)=-f(X)\right)$, perciò il grafico di Γ risulta simmetrico rispetto al punto $A(2;0)$.

La derivata di $y = f(x)$ è:

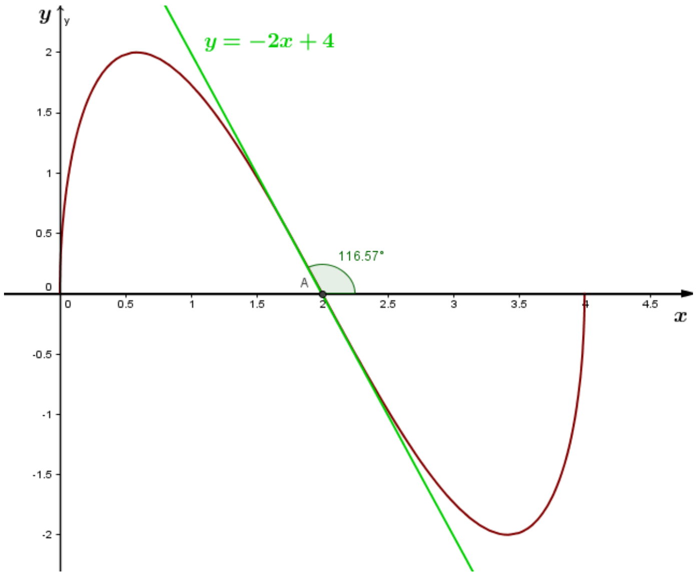
$$f'(x) = -1\cdot\sqrt{4x-x^2} + (2-x)\cdot\frac{(4-2x)}{2\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + \frac{(2-x)^2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-4x+x^2+4-4x+x^2}{\sqrt{4x-x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

L'angolo α formato dalla retta tangente a Γ in A è tale che $\operatorname{tg}\alpha = m = f'(2)$.

Si ha che $f'(2) = \frac{8-16+4}{\sqrt{4}} = -2$, da cui $\alpha = \operatorname{arctg}(-2) \cong 116{,}565...$

L'ampiezza dell'angolo formato dalla retta tangente a Γ in A è circa $116°34'$.



Punto 2

Essendo $f'(x) = \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}$, si ha:

- $f'(2+t) = \frac{2(2+t)^2-8(2+t)+4}{\sqrt{4(2+t)-(2+t)^2}} = \frac{2t^2-4}{\sqrt{4-t^2}}$
- $f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2-8(2-t)+4}{\sqrt{4(2-t)-(2-t)^2}} = \frac{2t^2-4}{\sqrt{4-t^2}}.$

Poiché $f'(2+t) = f'(2-t)$, le rette tangenti a Γ in $x = 2 + t$ e $x = 2 - t$ $(\text{con } 0<t<2)$ risultano parallele.

Affinché una retta tangente a Γ sia parallela alla retta di equazione $21x+10y+31=0$, si deve avere che $f'(x)=-\frac{21}{10}=-2{,}1$, mentre per essere parallela alla retta di equazione $23x+12y+35=0$, occorre che $f'(x)=-\frac{23}{12}\cong-1{,}92$.

Dal grafico di Γ si deduce che la funzione è concava $\left(f''(x)<0\right)$ per $0<x<2$ e convessa $\left(f''(x)>0\right)$ per $2<x<4$, quindi si ha che la derivata prima decresce fino a x=2 per poi crescere.

	0 – 2	2 – 4
f	$\frown$	$\smile$
f''	$-$	$+$
f'	$\searrow$	$\nearrow$

Poiché in $x=2$ la derivata presenta il minimo ed è tale che $f'(2)=-2$, risulta essere $f'(x)\geq-2$.

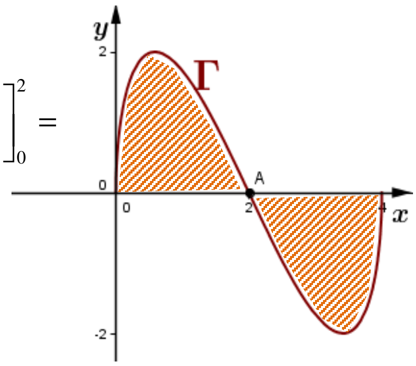
Pertanto, $f'(x)=-2{,}1$ non è accettabile (non esistono rette tangenti a Γ parallele alla retta di equazione $21x+10y+31=0$), mentre $f'(x)=-1{,}92$ ammette due soluzioni reali distinte, quindi esistono due rette tangenti a Γ e parallele alla retta $23x+12y+35=0$.

Punto 3

Essendo Γ simmetrica rispetto al punto A, l'area richiesta è il doppio della regione di piano compresa tra O e A:

$$A=2\cdot\int_0^2(2-x)\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int_0^2(4-2x)\cdot\left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{\left(4x-x^2\right)^3}\right]_0^2=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-0\right)=\frac{16}{3}.$$



Punto 4

Analizzando la funzione $h(x)=\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$:

- Intersezioni con gli assi: $O(0;0)$, $A(2;0)$ e $B(4;0)$.
- Studio del segno della derivata prima

$$h'(x)=\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}\cdot\cos\left((2-x)\sqrt{4x-x^2}\right)>0$$

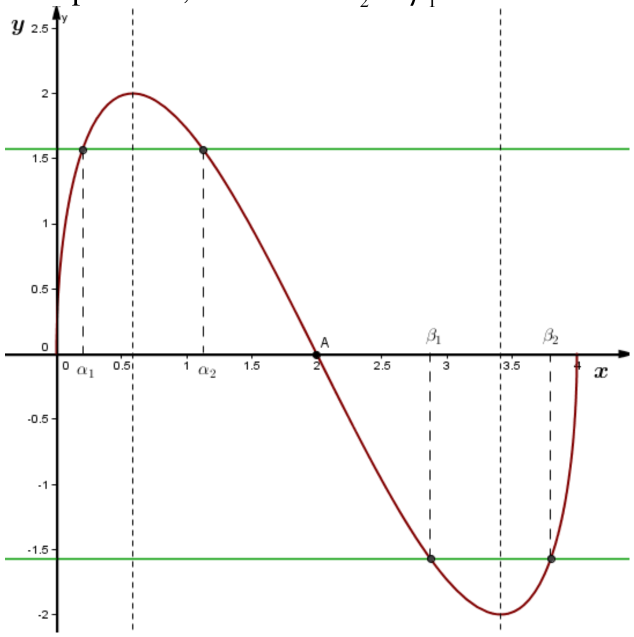
Il primo fattore è positivo per $0<x<2-\sqrt{2}\cup2+\sqrt{2}<x<4$, il secondo fattore è positivo per x tali che $-\frac{\pi}{2}<f(x)<\frac{\pi}{2}$.

Dal grafico di Γ si deduce che:

$f(x) = \frac{\pi}{2}$ per $x = \alpha_1$, con $0 < \alpha_1 < 2-\sqrt{2}$ e per $x = \alpha_2$, con $2-\sqrt{2} < \alpha_2 < 2$

$f(x) = -\frac{\pi}{2}$ per $x = \beta_1$, con $2 < \beta_1 < 2+\sqrt{2}$ e per $x = \beta_2$, con $2+\sqrt{2} < \beta_2 < 4$,

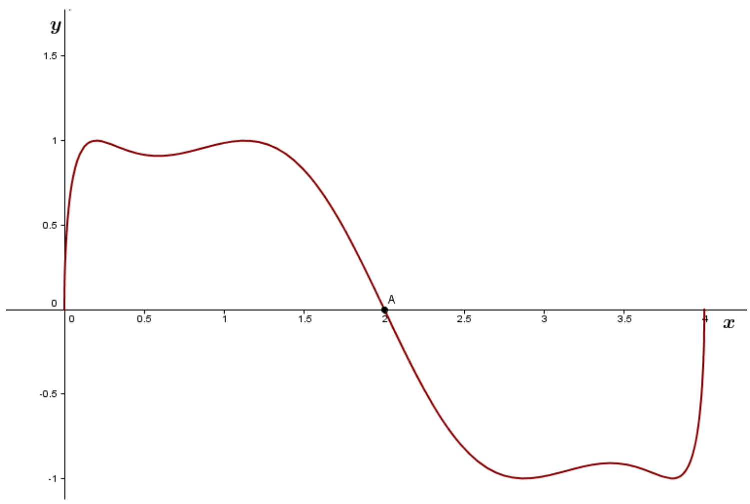
con α_1 e β_2 simmetrici tra loro rispetto a 2, così come α_2 e β_1.



Il segno di $h'(x)$ è:

		+		+		−		−		−		+		+	
		+		−		−		+		−		−		+	
f'		+		−		+		−		+		−		+	
f	0	↗	α_1	↘	$2-\sqrt{2}$	↗	α_2	↘	β_1	↗	$2+\sqrt{2}$	↘	β_2	↗	4

Si ha che $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $h\left(2-\sqrt{2}\right) = \operatorname{sen} 2 \cong 0,9$.



La funzione presenta:

- due massimi assoluti in $(\alpha_1; 1)$ e $(\alpha_2; 1)$
- due minimi assoluti in $(\beta_1; -1)$ e $(\beta_2; -1)$
- due massimi relativi in $\left(2+\sqrt{2}; -\operatorname{sen} 2\right)$ e $(4; 0)$
- due minimi relativi in $(0; 0)$ e $\left(2-\sqrt{2}; \operatorname{sen} 2\right)$.

Dal grafico si deduce che le rette del fascio $y = k$ (parallele all'asse x) intersecano la funzione in quattro punti distinti per i valori di k compresi tra l'ordinata del punto di minimo relativo $\left(2-\sqrt{2}; \operatorname{sen} 2\right)$ e le ordinate dei punti di massimo assoluto e tra l'ordinata del punto di massimo relativo $\left(2+\sqrt{2}; -\operatorname{sen} 2\right)$e le ordinate dei punti di minimo assoluto.
L'equazione $h(x) = k$ ha dunque 4 soluzioni distinte per $\operatorname{sen} 2 < k < 1 \cup -1 < k < -\operatorname{sen} 2$.

L'integrale $\int_0^4 h(x)\,dx$, essendo la funzione $h(x)$ simmetrica rispetto al punto $A(2; 0)$, vale 0.

Livello di difficoltà:		☐ Basso	☐ Medio		☒ Alto
È in programma nel liceo scientifico PNI?		☒ Sì	☐ No		☐ Non si sa
Normalmente viene svolto?		☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo?		☐ Mai	☐ Non sempre		☒ Sempre
Formulazione:	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?		☐ Sì		☒ No	