Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ATTENZIONE

Il plico relativo a questa prova contiene due temi: il primo destinato ai corsi sperimentali, il secondo ai corrispondenti corsi di ordinamento e ai candidati esterni che intendono sostenere gli esami sui programmi previsti per i corsi ordinari.

In assenza di uno dei due tipi di corsi summenzionati, il tema ad esso destinato non dovrà essere ovviamente utilizzato, ma dovrà rimanere agli atti della Commissione.

Sessione suppletiva 2014
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La curva γ è rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = \frac{t+1}{t}, \quad y = \frac{t^2+1}{t}$$

1. Se ne ricavi l'equazione cartesiana $y = f(x)$ e se ne costruisca il grafico.
2. Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che tale retta forma con l'asintoto obliquo.
3. Si calcoli l'area della regione di piano Σ, delimitata da γ, dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x = 2$ e $x = 4$.
4. Verificato che è $A(\Sigma) = \log 3$, si calcoli un'approssimazione di $\log 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si dimostri che l'equazione

   $$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$$

   ha, sull'intervallo $1 < x < 2$, un'unica radice reale ξ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

   Dopo aver constatato che ξ altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva γ, si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.
3. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse y.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 2$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si determini il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^{x}+2}$.

2. La funzione:

$$f(x)=sen\sqrt[3]{x},$$

è evidentemente continua nel punto $x=0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\frac{x^2}{3}\left(2+sen^2\frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x=\frac{1}{\pi}$.

4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x+y-1=0$ e $x-1=0$ ed il grafico della funzione $y=e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.

5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

6. Si disegni il grafico γ della funzione:

$$f(x) = \text{distanza di } x \text{ dal più prossimo intero.}$$

Si dica se $f(x)$ è una funzione periodica e si calcoli l'area della regione di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta $x=\frac{9}{10}$ nell'intervallo $\left[0,\frac{9}{10}\right]$.

7. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ e dall'asse delle x nell'intervallo $-1\le x\le 1$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

8. Si consideri l'equazione

$$\log|x| - e^x = 0.$$

Si dimostri che essa ammette una soluzione reale appartenente all'intervallo $-2 \le x \le -1$ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estraendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?

10. Nel poscritto al suo racconto *"Il Mistero di Marie Rogêt"*, Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

1. Posto $A\hat{O}M = a$, si calcoli il rapporto:

$$\frac{MN}{MA}$$

e lo si esprima in funzione di $x = sen\frac{\alpha}{2}$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.
4. Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x\log^2 x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = e$ e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione $x = e$.
3. Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = e$ e $x = k$ $(k > e)$.
4. Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si determini il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^{x}+2}$.
2. La funzione:
$$f(x)=sen\sqrt[3]{x},$$
è evidentemente continua nel punto $x=0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x)=\frac{x^2}{3}\left(2+sen^2\frac{1}{x}\right)$$
nel punto P di ascissa $x=\frac{1}{\pi}$.
4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x+y-1=0$ e $x-1=0$ ed il grafico della funzione $y=e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.
5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.
6. Si trovino gli eventuali flessi della curva:
$$f(x)=x\left[(\log 3x)^2-2\log 3x+2\right].$$
7. Una scatola di forma cilindrica ha raggio r e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?
8. Si calcoli il limite della funzione $\frac{senx+\cos x-\sqrt{2}}{\log sen2x}$, quando x tende a $\frac{\pi}{4}$.
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y=\cos^5 x,$$
nell'intervallo $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.
10. Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

___

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.