Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 18 giugno 2015

<u>Problema 1</u>
Soluzione a cura di L. Rossi

Soluzione del PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:
$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$
Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

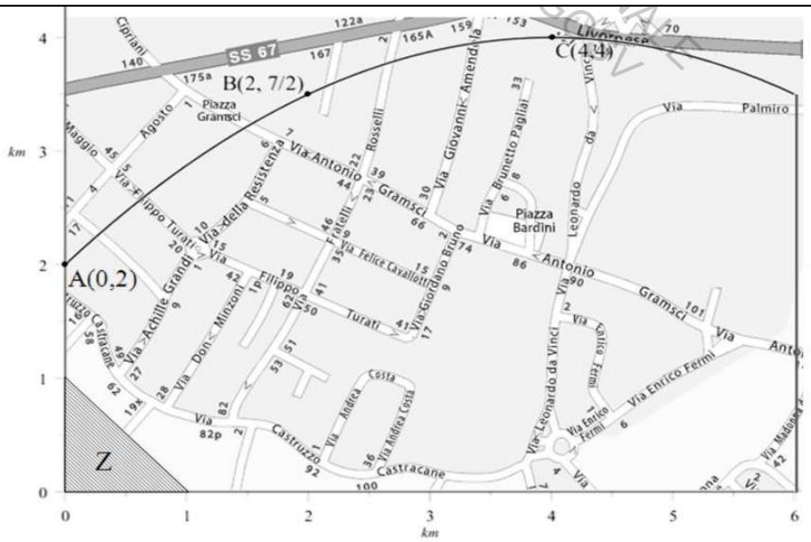


Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

Soluzione

<u>Punto 1</u>

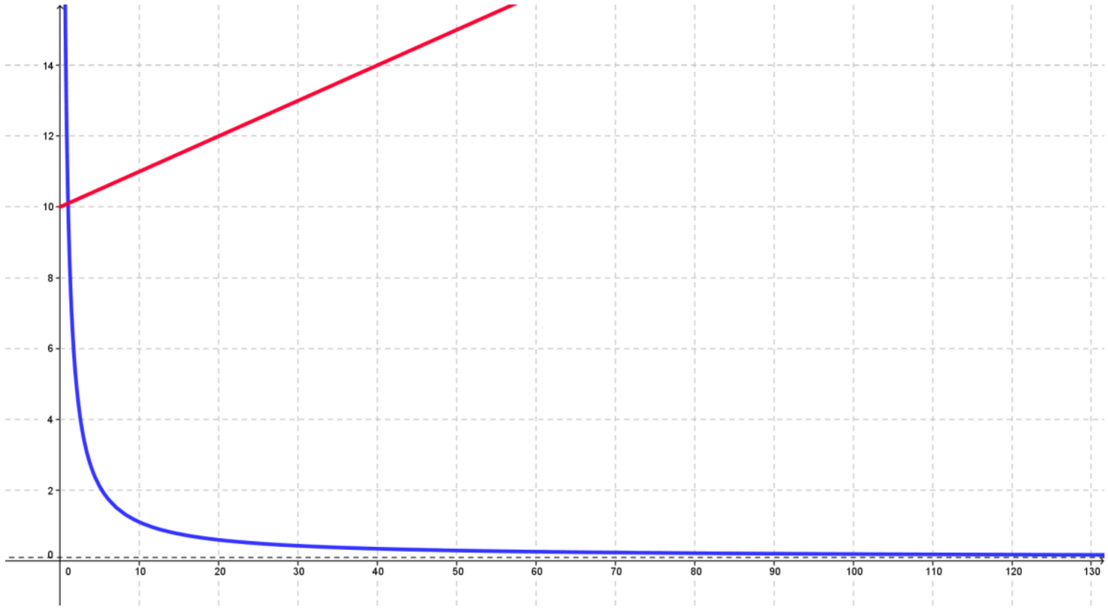
Si ha:

$f(x) = 10 + 0{,}1x \qquad x \geq 0$

e

$$g(x) = \frac{10 + 0{,}1x}{x} \qquad x > 0$$

In realtà nelle limitazioni relative all'incognita bisognerebbe tener conto dei minuti massimi in un mese commerciale di 30 giorni, ossia 43200 minuti.



Per $x \geq 0$, $y = f(x)$ è una semiretta; la spesa mensile è minima (di 10 euro) se non vengono effettuate telefonate; il costo aumenta all'aumentare del numero dei minuti di telefonate.

Per $x > 0$, $y = g(x)$ è un ramo di iperbole equilatera riferita agli asintoti traslata; l'asintoto verticale ha equazione $x = 0$ e l'asintoto orizzontale ha equazione $y = 0{,}1$; la funzione è decrescente nell'intervallo considerato, al tendere a zero del numero dei minuti di telefonate il costo medio al minuto aumenta, all'aumentare dei minuti di telefonate effettuate il costo medio al minuto diminuisce e si avvicina a 10 centesimi (anche tenendo conto dell'osservazione iniziale il costo medio è già dell'ordine di 10,02 centesimi)

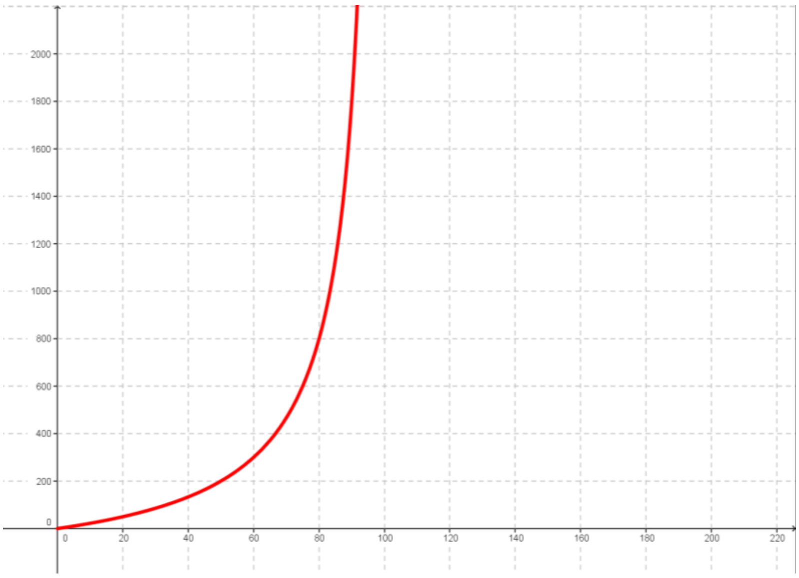
Le due curve si intersecano nel punto di ascissa $x = 1$ (per un minuto di conversazione costo totale e costo medio coincidono).

<u>Punto 2</u>

$$\frac{10 + 0{,}1x_1}{x_1} = \frac{1}{2}\,\frac{10 + 0{,}1x_0}{x_0}$$

dopo rapidi calcoli si ottiene:

$$x_1 = \frac{20x_0}{10 - 0{,}1x_0}$$



Si tratta anche in questo caso di un ramo di iperbole equilatera riferita agli asintoti traslata. Essa è definita nell'intervallo $0 \leq x < 100$. Per $x = 100$ il costo medio al minuto $g(100) = 0{,}2$, dunque si chiede per quale numero di minuti il costo medio al minuto sia $\frac{0{,}2}{2} = 0{,}1$. Ricordando le osservazioni fatte relativamente alla funzione $y = g(x)$, tale risultato è impossibile essendo $y = 0{,}1$ valore che la funzione *costo medio* non può assumere (asintoto orizzontale per $y = g(x)$). Trascuriamo $x > 100$ poiché per tali valori $g(x) < 0{,}1$ e quindi impossibile.

Punto 3

La funzione cercata è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $x \in [0{,}6]$, passante per i punti $A(0{,}2), B\left(2, \frac{7}{2}\right), C(4{,}4)$. Imponendo il passaggio per tali punti e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$ con $x \in [0{,}6]$

Si calcola l'area della regione delimitata dalla funzione nell'intervallo $[0{,}6]$:

$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx$$

$$\left[-\frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21$$

Da tale area togliamo l'area Z che vale 0,5.
Quindi la copertura del segnale è garantita su circa il 97,6% del territorio valendo la proporzione:

$$20{,}5 : 21 = x : 100$$

Punto 4

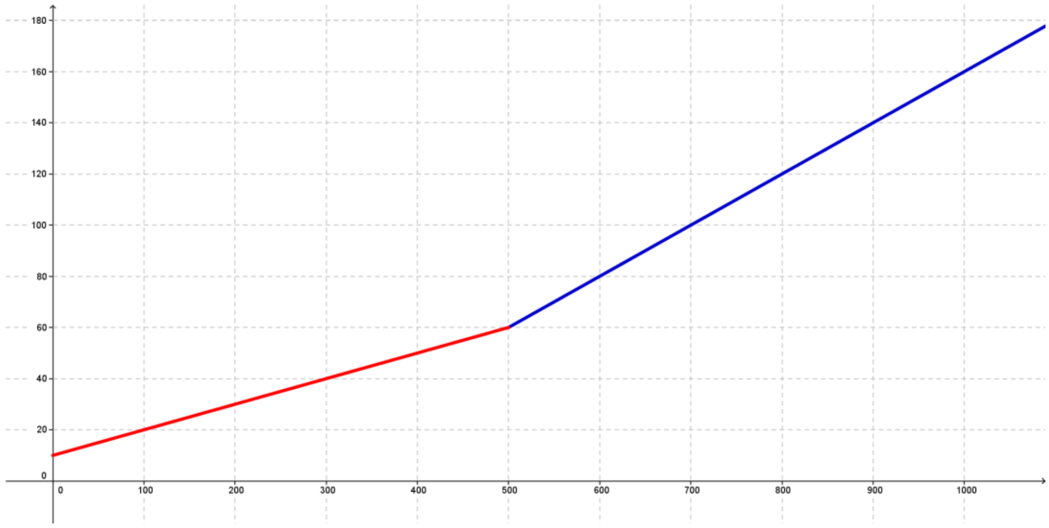
La funzione $f(x)$ con il nuovo piano tariffario diventa:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 0{,}1x & 0 \leq x \leq 500 \\ 0{,}2x - 40 & x > 500 \end{cases}$$

E la funzione $g(x)$ diventa:

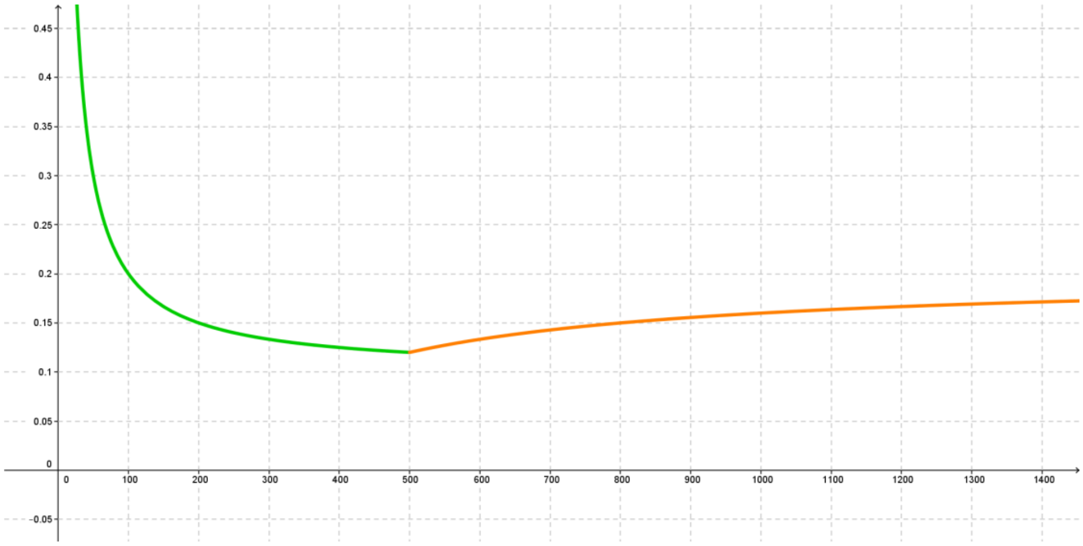
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{10 + 0{,}1x}{x} & 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{0{,}2x - 40}{x} & x > 500 \end{cases}$$

L'andamento della funzione definita a tratti $y = f(x)$ è riportato in figura:



Essa rimane una funzione crescente in $x \geq 0$, presenta un minimo di spesa di 10 euro sempre per $x = 0$; la funzione pur rimanendo continua nel suo dominio presenta in $x = 500$ un punto di non derivabilità (punto angoloso, derivata sinistra 0,1 e derivata destra 0,2, pari ai coefficienti angolari delle due rette).

L'andamento della funzione definita a tratti $y = g(x)$ è riportato in figura:

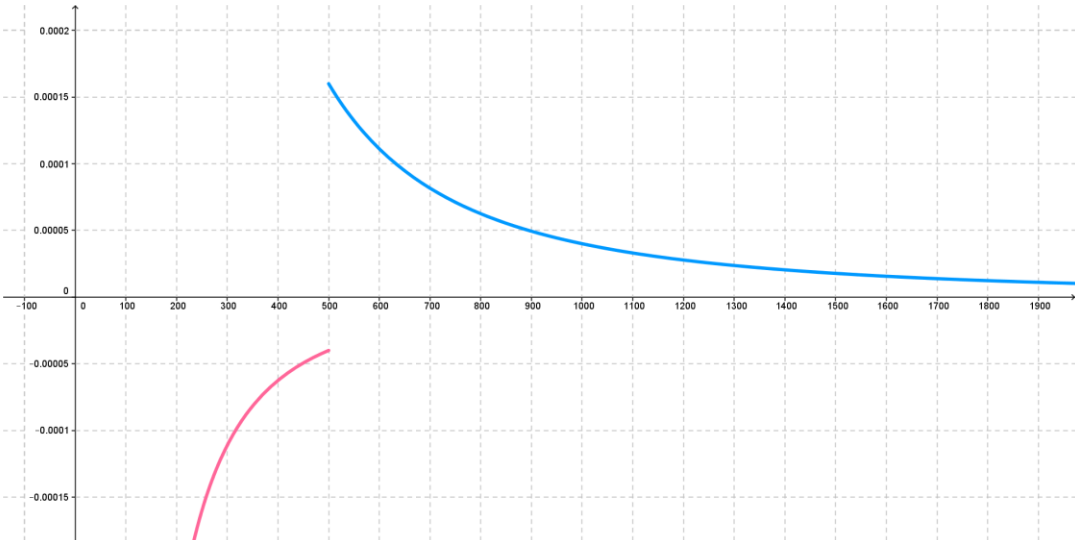


La funzione $y = g(x)$ risulta continua nel suo dominio, essa presenta asintoto verticale $x = 0$ per $x \to 0^+$ e asintoto orizzontale $y = 0{,}2$ per $x \to +\infty$. Decrescente per $0 < x \leq 500$, crescente per $x \geq 500$. In $x = 500$ presenta un punto angoloso:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & x > 500 \end{cases}$$

derivata sinistra in $x = 500$ vale $-0{,}00004$, la derivata destra vale $0{,}00016$.
Tale punto $x = 500$ è anche di minimo assoluto per la funzione. Quindi effettuando 500 minuti di telefonate si ha un costo medio mensile al minuto minimo.

L'andamento della funzione $y = g'(x)$ è riportato in figura:



Essa presenta una discontinuità di prima specie in $x = 500$. Per $x \leq 500$ essa risulta negativa poiché il costo medio decresce, per $x > 500$ risulta positiva poiché il costo medio cresce.

Giudizio sul problema

<table>
<tr><td>Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ Basso</td><td colspan="2">☒ Medio</td><td>☐ Alto</td></tr>
<tr><td>Si tratta di un problema contestualizzato (SI/NO)</td><td colspan="2">☐ In modo forzato</td><td colspan="2">☒ In modo accettabile</td><td>☐ Ben contestualizzato</td></tr>
<tr><td>L’argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ No</td><td>☐ Non è esplicitato/Non è chiaro</td></tr>
<tr><td>Di solito, viene svolto?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ No</td><td>☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td>È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td colspan="2">☒ Non sempre</td><td>☐ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione:</td><td>☐ Scorretta</td><td>☒ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td>☐ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td>Verifica conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="3">☐ No</td></tr>
</table>