Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 18 giugno 2015

<u>Problema 2</u>

Soluzione a cura di L. Tomasi

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3,3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

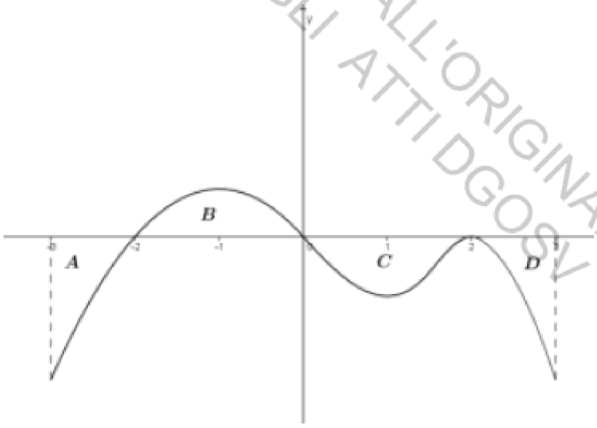

Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3,3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Soluzione

La funzione, derivabile in [-3,3] per ipotesi, deve verificare le seguenti condizioni $f'(-1) = f'(1) = f'(2) = 0$. Inoltre si ha:

$$\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx = -2 \ , \ \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 3, \ \int_{0}^{2} f(x)\,dx = -3 \ \text{ e } \ \int_{2}^{3} f(x)\,dx = -1 .$$

Infine si sa che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$, tale che $g(3) = -5$

<u>Punto 1</u>

Se $f(x)$ è una funzione polinomiale, il suo grado minimo deve essere 4 perché l'equazione $f(x)=0$ ha 3 radici, ma la radice $x=2$ deve avere come minimo molteplicità 2. Abbiamo usato il teorema fondamentale dell'algebra per dedurre questo ed abbiamo assunto inoltre, dal grafico, che $f(0)=0$.
La funzione $f(x)$, se fosse polinomiale, avrebbe come minimo grado 4 e pertanto si potrebbe pensare ("ingenuamente") essere del tipo $f(x)=a\left(x+2\right)x\left(x-2\right)^2$, ma questa funzione verificherebbe solo ad alcune delle condizioni iniziali, non a tutte. Se $f(x)$ fosse una funzione polinomiale di 4^ grado, la derivata prima sarebbe una funzione polinomiale di terzo grado. Nel nostro caso sappiamo che $f'(x)$ si annulla almeno tre volte. Una primitiva $g(x)$ sarebbe dunque una funzione polinomiale almeno di grado 5.
Abbiamo assunto che $f(x)$ passi per l'origine, ma nulla sappiamo di quel che succede al di fuori dell'intervallo [-3,3].

Nota al punto 1. *In realtà, se si cerca il polinomio di quarto grado che soddisfi tutte le condizioni previste –cosa tuttavia non richiesta dal punto* 1 *del problema- si scopre che tale polinomio non esiste. In* $f(x)=a\left(x+2\right)x\left(x-2\right)^2$ *si ricava addirittura a*=0. *Se ne può dedurre che la funzione* $f(x)$ *o non è esprimibile attraverso un polinomio, oppure tale polinomio, se esiste, in realtà non può avere minimo grado* 4.

Punto 2

In base al grafico di $f\left(x\right)$ nell'intervallo [-3,3] possiamo dire che $g(x)$ ha un massimo relativo per $x=0$. Infatti, essendo $f(x)$ la derivata di $g(x)$, si osserva che per $-2<x<0$ si ha $g'(x)>0$ e per $0<x<2$ si ha $g'(x)<0$. Quindi $x=0$ è un punto di massimo relativo per $g(x)$.
I valori per cui $g(x)$ volge la concavità verso l'alto, ossia $g(x)$ è convessa, sono quelli in cui la sua derivata seconda ($g''(x)=f'(x)$) è positiva. Questi sono i punti in cui $f(x)$ è crescente nell'intervallo considerato. In definitiva $g(x)$ è convessa per $-3<x<-1$ e per $1<x<2$.

Punto 3

Sappiamo che $g(3)=g(0)+\int_0^3 f(x)\,dx$.

Otteniamo dunque $-5=g(0)+\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

ovvero
$-5=g(0)+(-3)+(-1)$.
Quindi
$g(0)=-1$.

Dobbiamo controllare se esiste il limite $\lim_{x\to0}\frac{1+g(x)}{2x}$, che si presenta nella forma indeterminata "0/0".

Ricorrendo le ipotesi, applichiamo la regola di De L'Hospital; si ottiene $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2}=0$.

Punto 4

Se $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$, allora sostituendo si ha

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,dx = 3 \cdot \int_{-2}^{1} f(2x+1)\,dx \ .$$

Posto $2x+1=t$, si ha $x = \dfrac{t-1}{2}$ e quindi $dx = \dfrac{1}{2}dt$.

Sostituendo si ottiene:

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,dx = 3 \cdot \int_{-2}^{1} f(2x+1)\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int_{-3}^{3} f(t)\,dt = \frac{3}{2} \cdot (-3) = -\frac{9}{2}.$$

Giudizio sul problema 2

<table>
<tr><td colspan="2">Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ Basso</td><td colspan="2">☐ Medio</td><td colspan="2">☒ Alto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si tratta di un problema contestualizzato (NO)</td><td colspan="2">☐ In modo forzato</td><td colspan="2">☐ In modo accettabile</td><td colspan="2">☐ Ben contestualizzato</td></tr>
<tr><td colspan="2">L’argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifci?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non è esplicitato/Non è chiaro</td></tr>
<tr><td colspan="2">Di solito, viene svolto?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td colspan="2">È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td><td colspan="2">☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione:</td><td colspan="2">☐ Scorretta</td><td>☒ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td colspan="2">☐ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td colspan="3">Verifica conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☒ Sì</td><td colspan="3">☐ No</td></tr>
</table>