

QUESTIONARIO

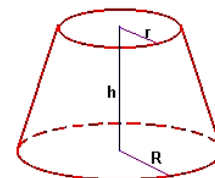
Quesito 2

Soluzione a cura di L. Tomasi e S. De Stefani

2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.



1° METODO

Una dimostrazione elementare è la seguente: si considera un tronco di cono circolare retto e si completa la figura con un cono piccolo, di altezza x .

Sia R il raggio di una base ed r il raggio dell'altra base.

Si ha, per similitudine:

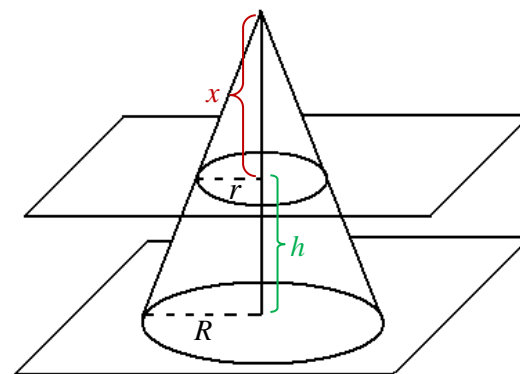
$$R : (h + x) = r : x.$$

Quindi $Rx = (h + x)x$,

da cui si ricava $Rx = r(h + x)$,

quindi:

$$x = \frac{hr}{R - r}$$



Il volume del tronco di cono è dato dunque da:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 (h + x) - \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi (R^2 (h + x) - r^2 x) = \frac{1}{3} \pi (R^2 h + x (R^2 - r^2))$$

Sostituendo, si ha:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 h + \frac{hr}{R - r} (R^2 - r^2) \right) = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 h + \frac{hr}{R - r} (R - r)(R + r) \right)$$

da cui, scomponendo e semplificando, $V = \frac{1}{3} \pi (R^2 h + hr(R + r)) \rightarrow$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

2° METODO

La retta passante per $A(0; r)$ e $B(h; R)$

ha equazione: $y = \frac{R-r}{h}x + r$.

Il volume del tronco di cono si ottiene come volume del solido ottenuto dalla rotazione del segmento AB attorno all'asse x , quindi:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^h \left(\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2 + 2 \frac{(R-r)r}{h}x + r^2 \right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3 + \frac{(R-r)r}{h}x^2 + r^2x \right]_0^h = \pi \left(\frac{(R-r)^2}{3h^2}h^3 + \frac{(R-r)r}{h}h^2 + r^2h \right) =$$

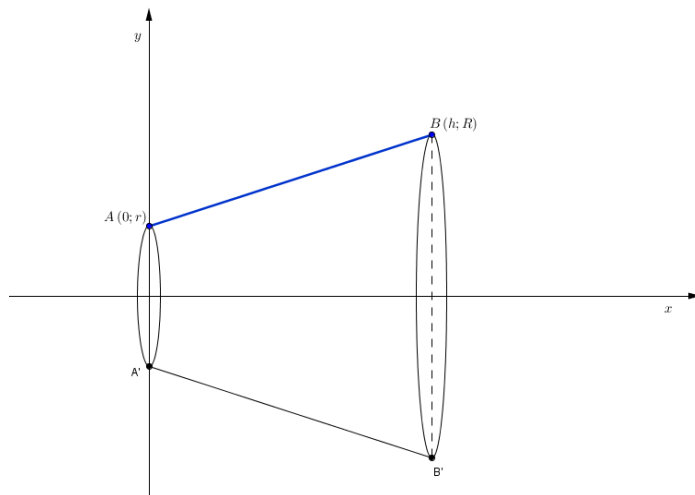
$$= \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 - 2rR + 3Rr - 3r^2 + 3r^2) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + rR)$$

o, in alternativa:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{h}{R-r} \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 \cdot \frac{R-r}{h} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{R-r} \left[\left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^3 \right]_0^h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{R-r} (R^3 - r^3) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{R-r} (R-r)(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2)$$



Giudizio sul quesito

| | | | | | |
|--|--|---|---|-----------------------------------|--|
| Livello di difficoltà | <input type="checkbox"/> Basso | <input checked="" type="checkbox"/> Medio | <input type="checkbox"/> Alto | | |
| L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non è esplicitato/Non è chiaro | | |
| Di solito, viene svolto? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non sempre | | |
| È un argomento presente nei libri di testo? | <input type="checkbox"/> Mai | <input type="checkbox"/> Non sempre | <input checked="" type="checkbox"/> Sempre | | |
| Formulazione: | <input type="checkbox"/> Scorretta | <input type="checkbox"/> Ambigua | <input type="checkbox"/> Poco chiara | <input type="checkbox"/> Corretta | <input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara |
| Verifica conoscenze/abilità/competenze fondamentali? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | | <input type="checkbox"/> No | | |