Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 23 giugno 2016

Problema 2

Soluzione a cura di Sara De Stefani e Lugi Tomasi

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

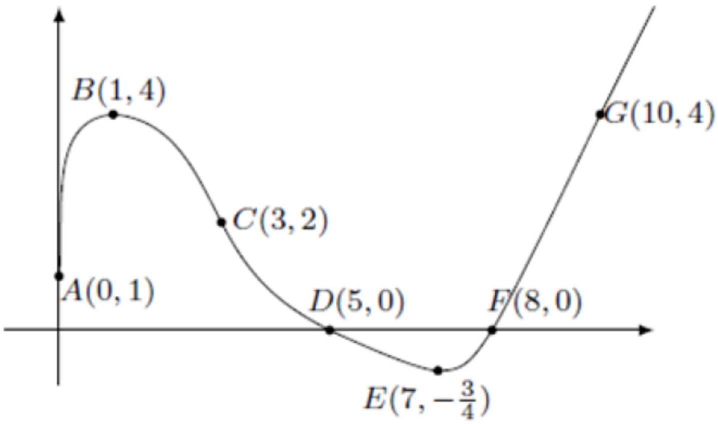


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.
Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni
$$y = f'(x)$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$
Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.
2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:
$$y = |f'(x)|$$
$$y = |f(x)|'$$
$$y = \frac{1}{f(x)}$$
specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.
3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0,8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1,7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9,10].
4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Soluzione

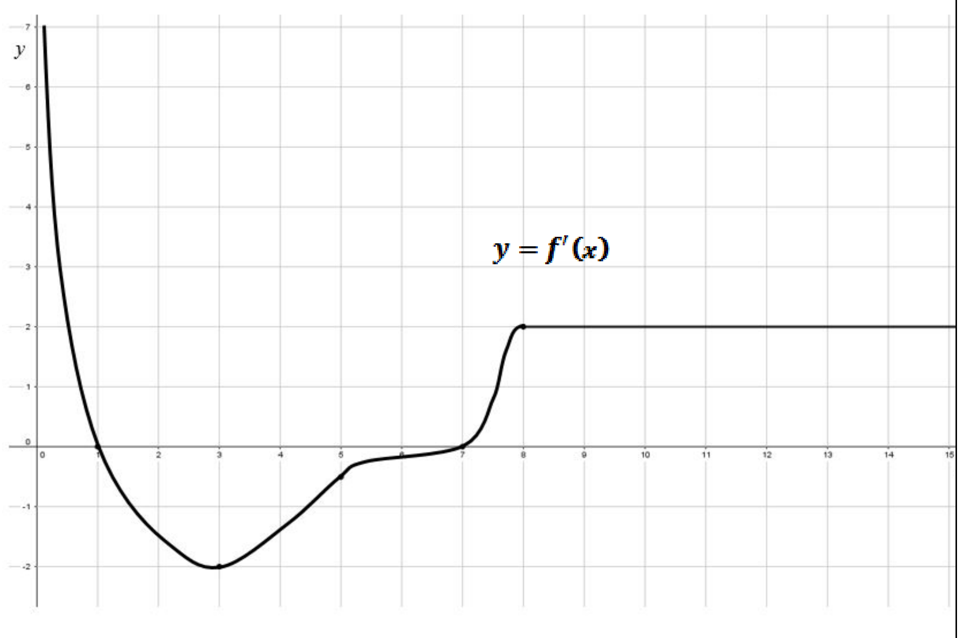
Usando le informazioni assegnate e il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo compilare la seguente tabella:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$x=0$	$f(0)=1$	Non esiste, ma a destra di 0 tende a $+\infty$	$F(0)=0$
$0<x<1$	crescente	$f'(x)>0$	$F(x)>0$
$x=1$	$f(1)=4$	$f'(1)=0$	$F(1)>0$
$x=3$	$f(3)=2$	$f'(3)=-2$	$F(2)>F(1)>0$
$x=5$	$f(5)=0$	$f'(5)=-1/2$	$F(5)=11$
$x=7$	$f(7)=-3/4$	$f'(7)=0$	$F(7)>0$
$x=8$	$f(8)=0$	$f'(8)=2$	$F(8)=10$
$x=9$	$f(9)=2$	$f'(9)=2$	$F(9)=11$
$x=10$	$f(10)=4$	$f'(10)=2$	$F(10)=14$
$\dots$			

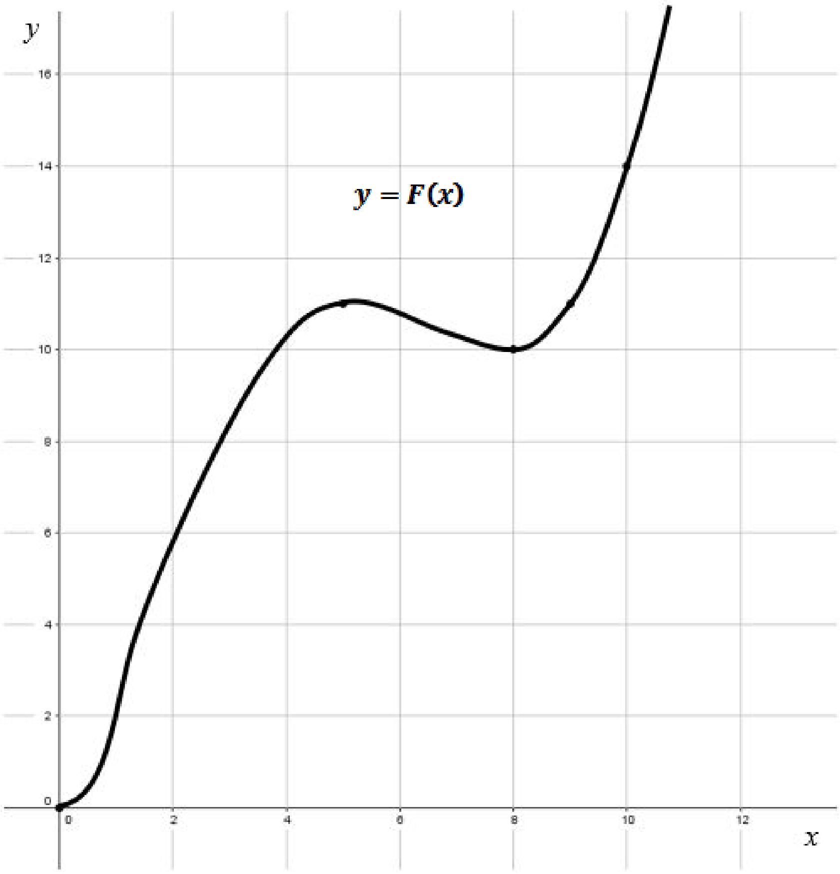
Punto 1

Si ha ovviamente $f'(3)=-2$ ed $f'(5)=-1/2$ perché queste sono le pendenze delle rette tangenti nei due punti dati.

I grafici richiesti saranno i seguenti.

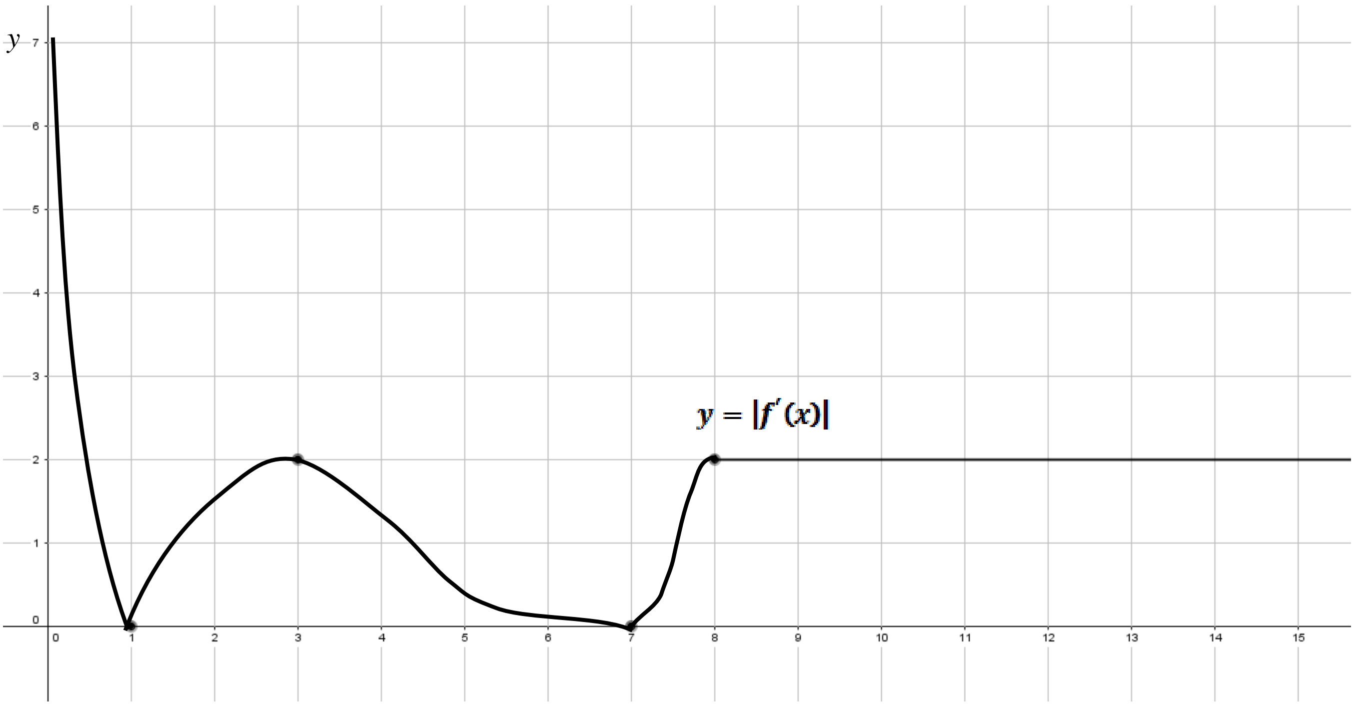


$f'(x)$
Non esiste, ma a destra di 0 tende a $+\infty$
$f'(1)=0$
$f'(3)=-2$
$f'(5)=-1/2$
$f'(7)=0$
$f'(8)=2$
$f'(9)=2$
$f'(10)=2$

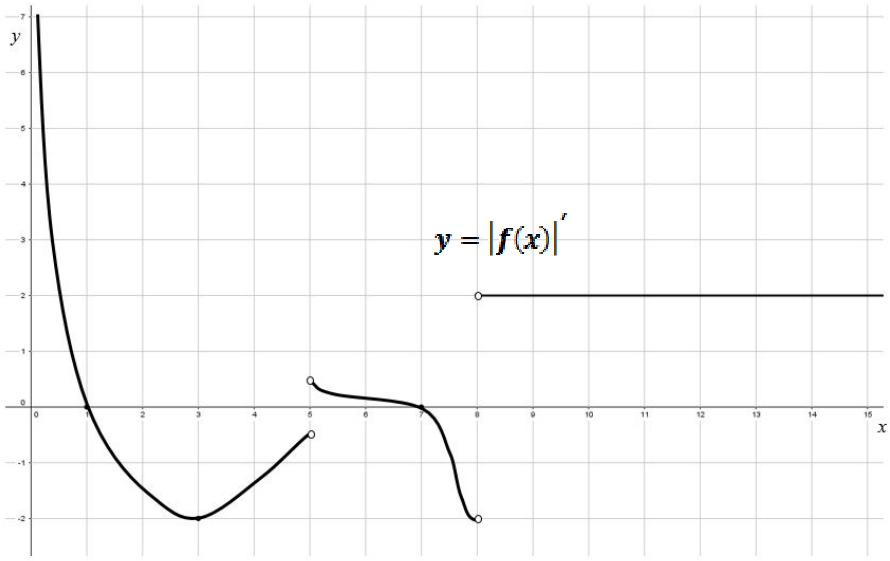


Punto 2

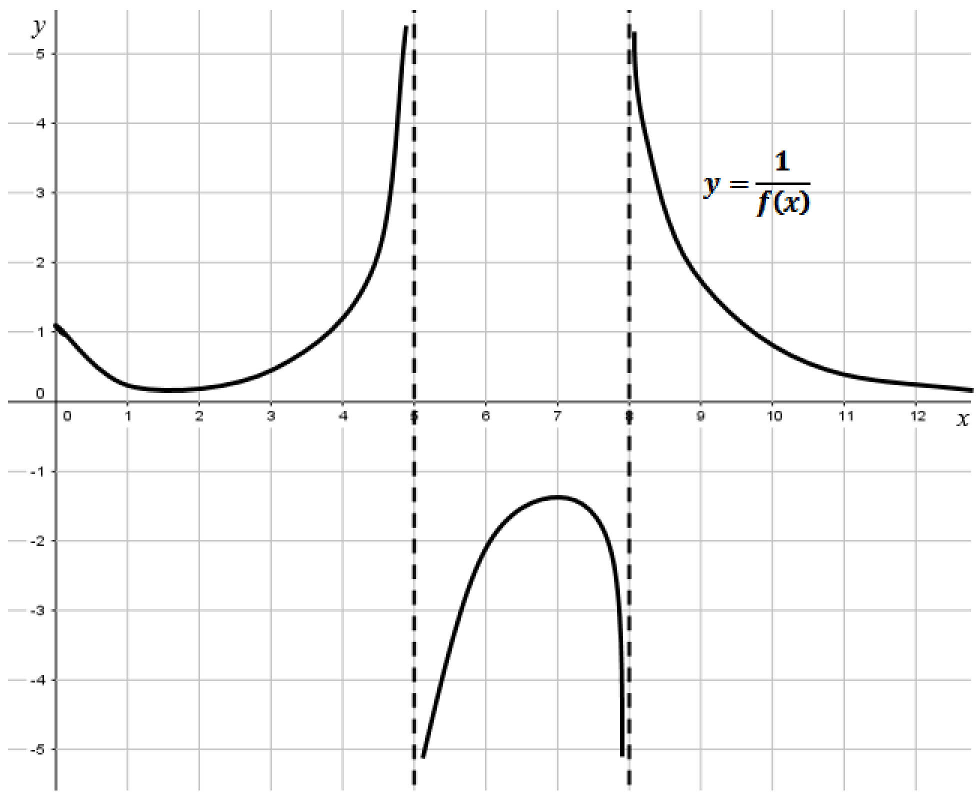
Il grafico della funzione $y = |f'(x)|$ si ottiene da quello della funzione $f'(x)$ simmetrizzando rispetto all'asse x le parti del grafico con ordinata negativa. L'andamento di questa funzione sarà lo stesso di $f'(x)$ dove $f'(x) \geq 0$. Il dominio di questa funzione sarà lo stesso dominio della $y = f'(x)$, ovvero $x > 0$.



Il grafico della funzione $y = |f(x)|'$ si può ottenere da quello della funzione $y = |f(x)|$. La funzione x $|f(x)|'$ è non derivabile nei punti di ascissa $x = 0$, $x = 5$ e $x = 8$. Negli altri punti di ascissa positiva è derivabile. Il dominio è quindi formato dai reali positivi esclusi i punti 5 ed 8, dove presenta dei salti.



Il grafico della funzione $y = \frac{1}{f(x)}$ si ottiene dal grafico della funzione $y = f(x)$. La funzione $y = \frac{1}{f(x)}$ avrà due asintoti verticali nei punti in cui si ha $f(x) = 0$, che saranno le rette di equazioni $x = 5$ e $x = 8$. Il dominio è quindi formato dai reali non negativi esclusi i punti 5 e 8.



Il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$ si ottiene dal grafico della funzione $f(x)$ tenendo conto di queste osservazioni:

-nei punti in cui $f(x)=0$, la funzione $\frac{1}{f(x)}$ non esiste, e avrà un asintoto verticale;

-i punti in cui $f(x)=1$ o $f(x)=-1$, sono punti anche del grafico di $\frac{1}{f(x)}$;

-nei punti in cui $f(x)>1$, la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è compresa tra 0 e 1;

-nei punti in cui $f(x)<-1$, la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è compresa tra -1 e 0;

-nei punti in cui $0<f(x)<1$, la funzione $\frac{1}{f(x)}>1$;

-i punti di massimo (minimo) relativo, con il massimo (minimo) non nullo, diventano punti rispettivamente di minimo (massimo) relativo;

-eccetera.

Punto 3

I valori medi richiesti sono i seguenti:

$$\text{Valor medio di } f(x) \text{ in } [0,8] = \frac{1}{8}\cdot\int_0^8 f(x)\,dx = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Valor medio di } |f(x)| \text{ in } [0,8] = \frac{1}{8}\cdot\int_0^8 |f(x)|\,dx = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Valor medio di } f'(x) \text{ in } [1,7] = \frac{1}{6}\cdot\int_1^7 f'(x)\,dx = \frac{f(7)-f(1)}{6} = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\frac{19}{24}$$

$$\text{Valor medio di } F(x) \text{ in } [9,10] = \int_9^{10} F(x)\,dx = \frac{37}{3} \ .$$

Per determinare quest'ultimo valor medio si ragiona sul grafico di $F(x)$ tra 9 e 10, che è un arco di parabola di equazione $y=x^2-16x+74$. Infatti si ha

$$F(x) = 11 + \int_9^x (2t-16)\,dt = 11 + \left[t^2-16t\right]_9^x = x^2-16x+74 \quad (\text{con } x \ge 9).$$

Quindi il valor medio di $F(x)$ in [9,10] sarà

$$\text{Valor medio di } F(x) \text{ in } [9,10] = \int_9^{10} F(x)\,dx = \int_9^{10}\left(x^2-16x+74\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-8x^2+74x\right]_9^{10} =$$

$$= \left(\frac{1000}{3}-800+740\right) - \left(\frac{729}{3}-648+666\right) = \frac{37}{3}.$$

Punto 4

Sapendo che la derivata prima di $F(x)$ è $f(x)$, si ha:

$$F'(0) = f(0) = 1$$
$$F'(8) = f(8) = 0$$

Quindi le rette tangenti a $F(x)$ nei punti richiesti saranno rispettivamente di equazioni $y = x$ e $y = 10$.

Commento

Quesito molto laborioso, pieno di calcoli e di grafici. Il teorema del calcolo integrale e il calcolo di un valor medio (teorema della media integrale) vengono ripetutamente richiesti. Chi ha proposto questo quesito, al Ministero, probabilmente non ha ben letto le *Indicazioni nazionali* per i Licei scientifici che dicono di non eccedere con i formalismi di calcolo.

Giudizio sul problema

Livello di difficoltà	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto		
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ In modo forzato	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Formulazione	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No		