Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 21 giugno 2018

<u>Problema 1</u>
Soluzione a cura di L. Tomasi

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo [0,1], che soddisfi le condizioni:
  a) $f(0) = 1$;
  b) $f(1) = 0$;
  c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ risp all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante i punti (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, conte nel quadrato Q di vertici (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1).
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa lasciando bianca la parte restante del quadrato Q; vengono quindi mostrate sul display al mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

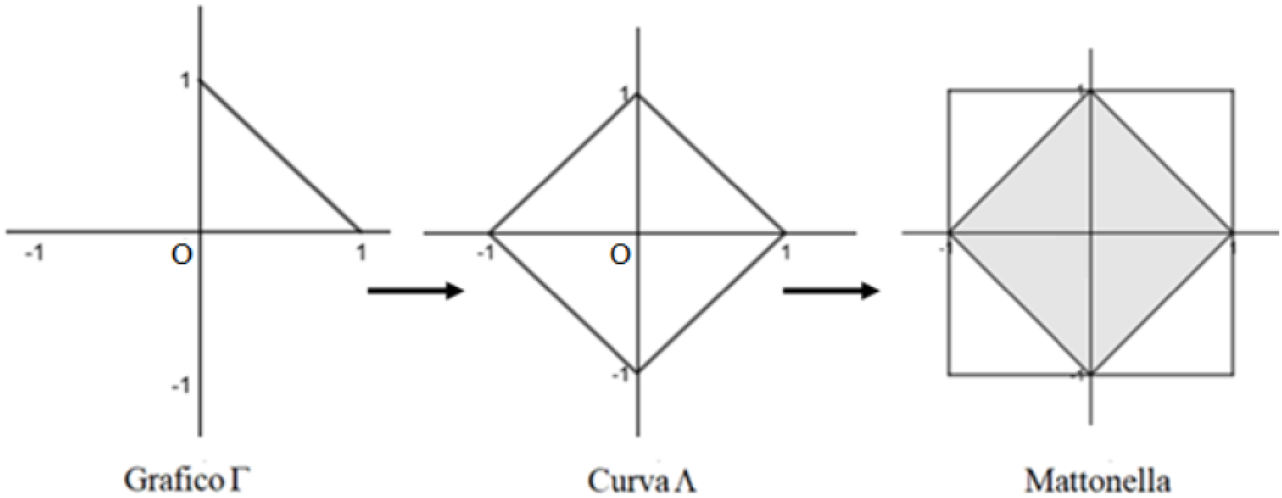


Figura 1

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

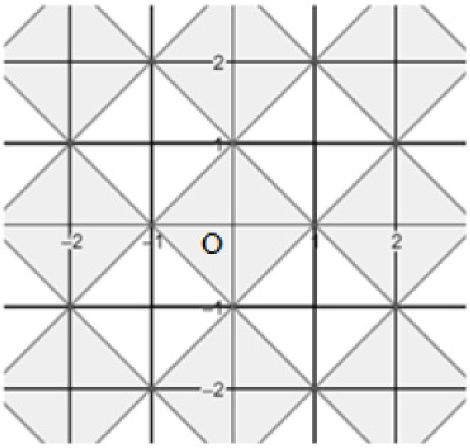


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \Re$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1-x)^n$, considerate per $x \in [0, 1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola $\lim_{n \to +\infty} A(n)$ e $\lim_{n \to +\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

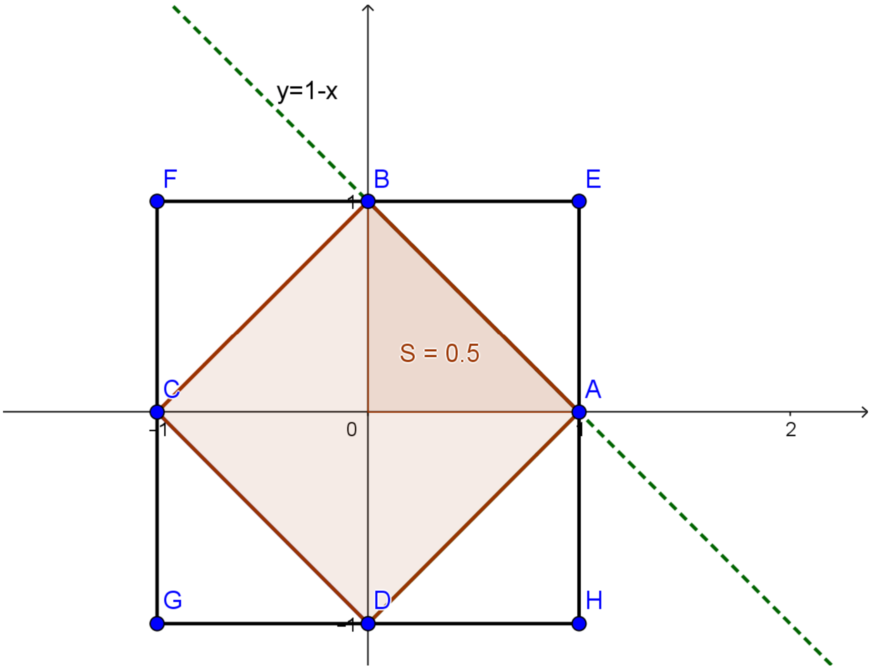
4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Soluzione

<u>Punto 1</u>

Con riferimento all'esempio semplice del "manuale d'uso" della macchina che colora le mattonelle (che hanno lato 2; il testo è ambiguo), la funzione sarà definita nel modo seguente

$f(x) = 1 - x$ se $0 \le x \le 1$.



L'equazione della curva Λ sarà pertanto $|y| = 1 - |x|$, ovvero $|x| + |y| = 1$.

Punto 2

Per costruire una mattonella (di lato 2) con un disegno più elaborato, con un'area racchiusa del 55% del quadrato Q, si può provare con una funzione quadratica

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

Imponendo le condizioni $f(0) = 1$ ed $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, si ottiene $f(x) = 1 - x^2$, che però forma un'area di 2/3 del quadrato dato, che è maggiore del 55%.

Consideriamo quindi una funzione polinomiale cubica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Imponendo le condizioni $f(0) = 1$ ed $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, si ottiene

$f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + 1$.

Imponiamo che la porzione di area racchiusa dalla curva Λ sia il 55% dell'area del quadrato Q, ovvero

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(ax^3 - (a+1)x^2 + 1\right)dx = \frac{55}{100}.$$

Si ottiene:

$$\left[\frac{ax^4}{4} - \frac{(a+1)x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{11}{20}$$

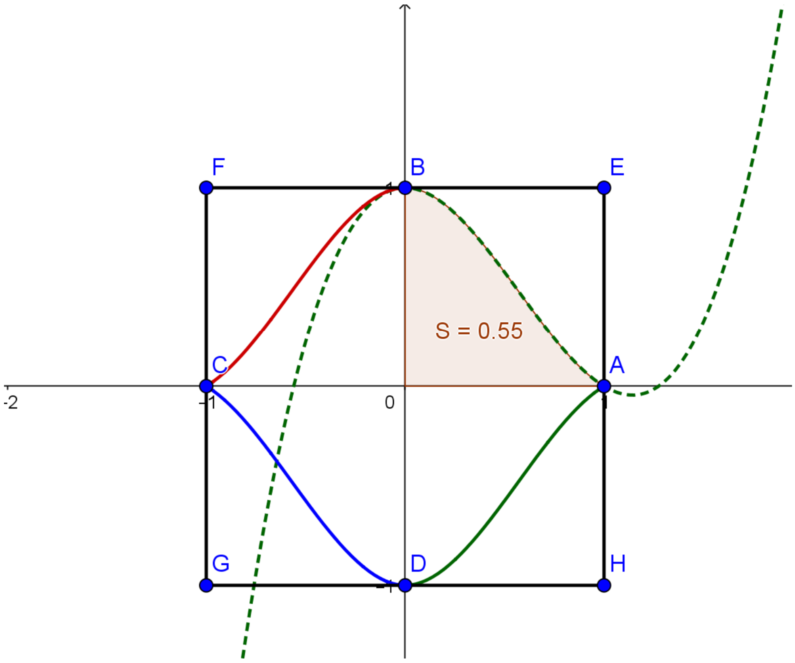
$$\frac{a}{4} - \frac{a+1}{3} + 1 = \frac{11}{20},$$

da cui si ricava $a=\frac{7}{5}$. Quindi $b=-\frac{12}{5}$.

La funzione polinomiale cubica sarà pertanto:

$f(x)=\frac{7}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2+1$, con $0\le x\le 1$.

In questo caso il grafico della curva e il disegno della mattonella sono rappresentati nella seguente figura.

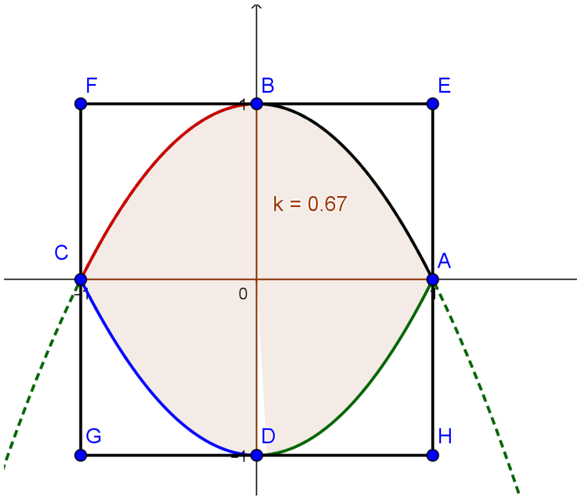


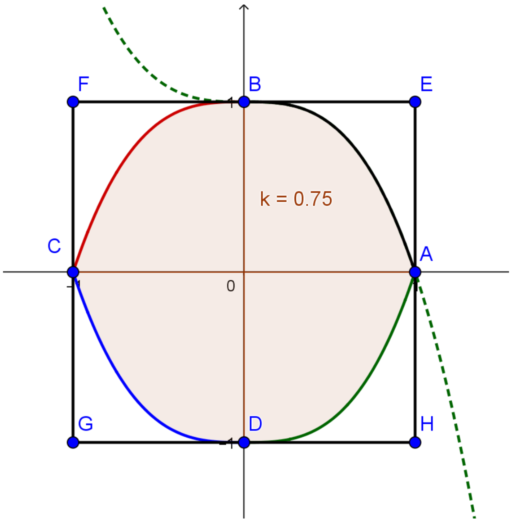
Punto 3

Consideriamo ora le proposte, fatte al cliente, delle funzioni $a_n(x)=1-x^n$ e $b_n(x)=(1-x)^n$ per ottenere due diversi tipi di disegno e di colorazione delle mattonelle.

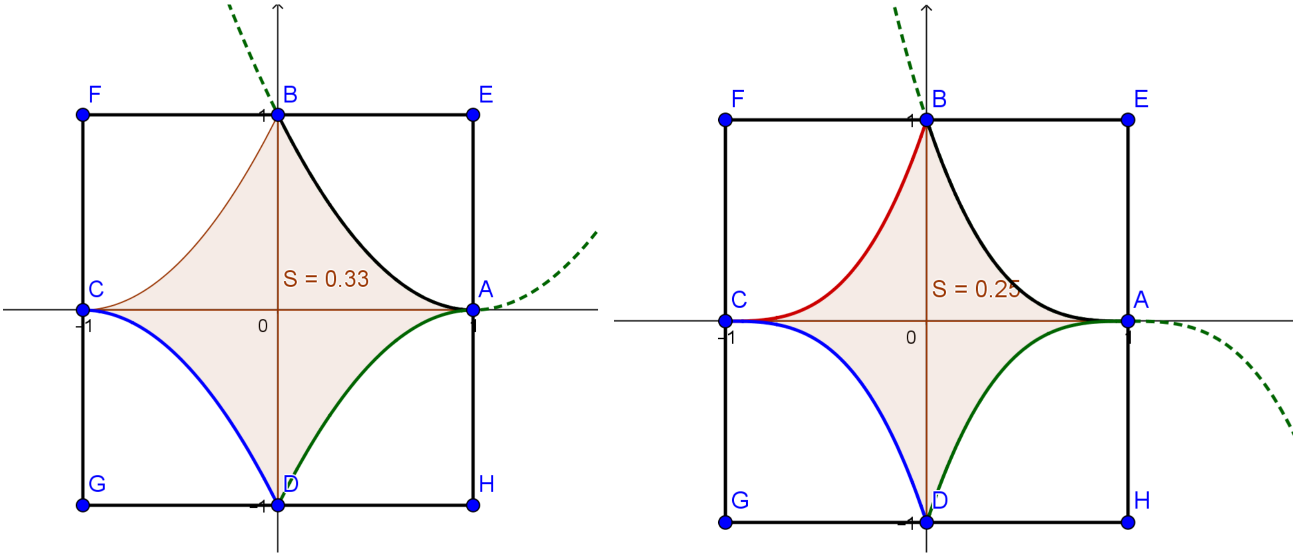
Si vede facilmente che entrambi i tipi di funzioni verificano le condizioni a), b), c).

Le funzioni del primo tipo $a_n(x)=1-x^n$ generano mattonelle del tipo rappresentato nella seguente figura (con *n*=2 ed *n*=3), con una colorazione che forma una figura convessa.





Le funzioni $b_n(x)=(1-x)^n$ generano invece mattonelle del tipo rappresentato nella seguente figura (con n=2 ed n=3), con una colorazione che forma una figura concava.



Dalla osservazione delle figure che si ottengono, si intuisce che il primo limite è 4, mentre il secondo limite vale 0. Verifichiamo con il calcolo:

Si ha $A(n)=4\int_0^1\left(1-x^n\right)dx=4\left[x-\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=4\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{4n}{n+1}$.

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty}A(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n}{n+1}=4$.

Analogamente si ha

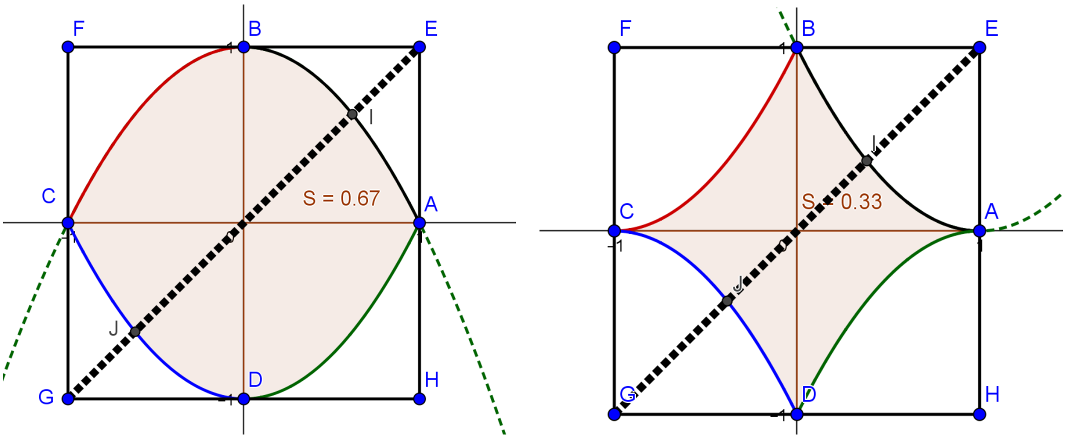
$$B(n)=4\int_0^1(1-x)^n\,dx=-4\int_0^1-(1-x)^n\,dx=-4\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{4}{n+1}.$$

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty}B(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{n+1}=0$.

Punto 4

Consideriamo la diagonale GE (vedi le figure seguenti).

Per calcolare il numero delle piastrelle che potrebbero essere danneggiate al termine del ciclo di produzione, tracciamo quindi la diagonale GE, che appartiene alla retta di equazione $y=x$.



Nel caso della piastrella che usa la funzione $a_2(x)$, la parte non colorata della diagonale (il complementare del segmento *IJ* in figura) è minore rispetto al secondo tipo di piastrella. Quindi ci sarà una minore probabilità, rispetto alla piastrella che usa la funzione $b_2(x)$ che la goccia cada sulla parte non colorata della piastrella.
Occorre quindi determinare il punto di intersezione del grafico di $a_2(x)$ con la retta $y = x$, con il sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene il punto *I* di coordinate $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$, avendo ovviamente scartato il punto che cade fuori del quadrato. Quindi la probabilità che la goccia cada fuori dalla zona colorata sarà

$$p_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 38\% .$$

A sua volta la goccia può cadere sulla piastrella con una probabilità del 20%.
In totale si ottiene (supponendo eventi indipendenti), chiamando *A* l'evento che "la piastrella del primo tipo è difettosa":

$$p(A) = 20\% \cdot 38\% = 7{,}6\% .$$

Il numero di piastrelle del primo tipo che potrebbero essere difettose diventa quindi:

$$N_1 = 5000 \cdot 7{,}6\% = 382 .$$

Nel caso della piastrella che usa la funzione $b_2(x)$, la parte non colorata della diagonale è maggiore rispetto al caso precedente. Quindi ci sarà una maggiore probabilità, rispetto alla piastrella che usa la funzione $a_2(x)$, che la goccia cada sulla parte non colorata della piastrella.
Occorre quindi determinare il punto di intersezione del grafico di $b_2(x)$ con la retta $y = x$, con il sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = (1 - x)^2 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene il punto *I* di coordinate $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$. Quindi la probabilità che la goccia cada fuori dalla zona colorata sarà del

$$p_2 = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 62\% .$$

A sua volta la goccia può cadere sulla diagonale della piastrale con una probabilità del 20%.
In totale si ottiene (supponendo eventi indipendenti), chiamando B l'evento "la piastrella del secondo tipo è difettosa":
$p(B) = 20\% \cdot 62\% = 12,4\%$.
Il numero di piastrelle del secondo tipo che potrebbero essere difettose diventa quindi:
$N_2 = 5000 \cdot 12,4\% = 618$.
In totale le piastrelle che *potrebbero* essere difettose è quindi 1000 (su 10000).

Osservazione

Si osserva la simmetria tra le probabilità $p_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 38\%$ e $p_2 = 1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 62\%$.

Si ha infatti $p_1 + p_2 = 1$. Questa relazione dipende dalla simmetria tra i punti di coordinate $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ rispetto al punto $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, che è il centro del quadrato di vertici $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ e $(0;1)$.

Giudizio sul problema

Livello di difficoltà	☐ Basso	☐ Medio		☒ Alto	
Si tratta di un problema contestualizzato?	☐ No	☐ In modo forzato	☐ In modo accettabile	☒ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Sempre	☐ Mai		☒ Non sempre	
Formulazione	☐ Scorretta	☒ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No	
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica (non CAS)?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No	

Commento

Il testo del problema è lunghissimo, di due pagine, con alcune ambiguità. All'inizio sembra che la "mattonella" debba avere lato 1; poi si capisce che invece ha lato 2 (vedi la figura 1 del testo).