Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 21 giugno 2018

Problema 2
Soluzione a cura di L. Rossi, S. De Stefani, L. Tomasi

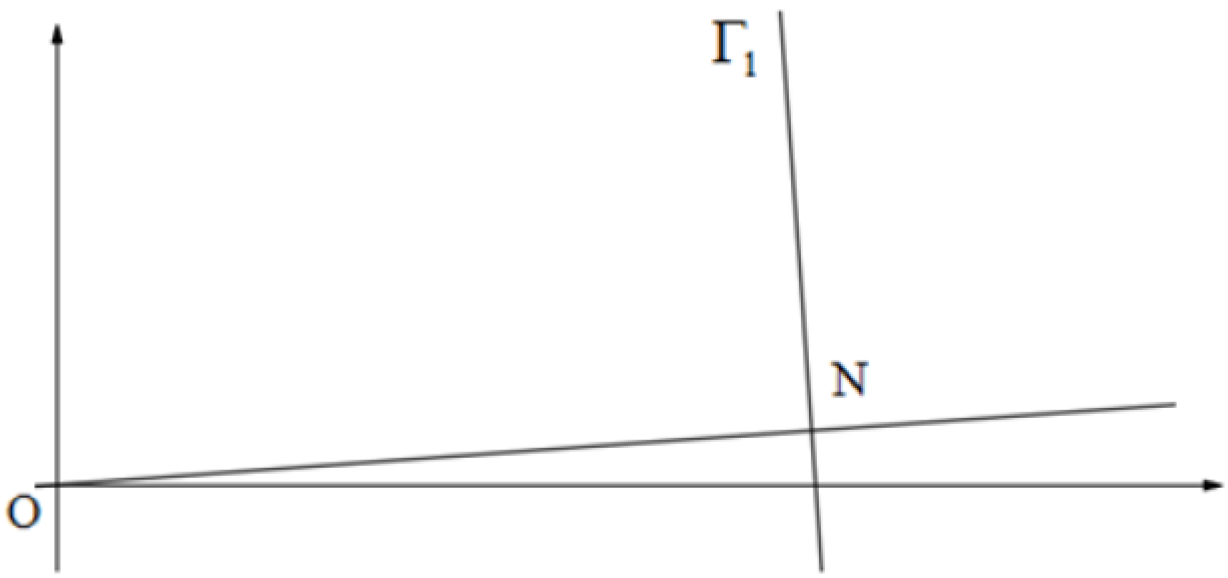
PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f_k : \Re \to \Re$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in Z$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Soluzione
Punto 1

$$f_k: \quad R \to R$$
$$x \mapsto -x^3 + kx + 9, \text{ con } k \in Z.$$

Si tratta di una famiglia di cubiche, funzioni ovviamente continue e derivabili in R, con derivata prima:

$$f'_k(x) = -3x^2 + k.$$

Consideriamo ora:

- r_k , retta tangente in $P(0;9)$ a Γ_k , ha coefficiente angolare $m_r = f'_k(0) = k$ ed equazione:

$$y - 9 = kx$$

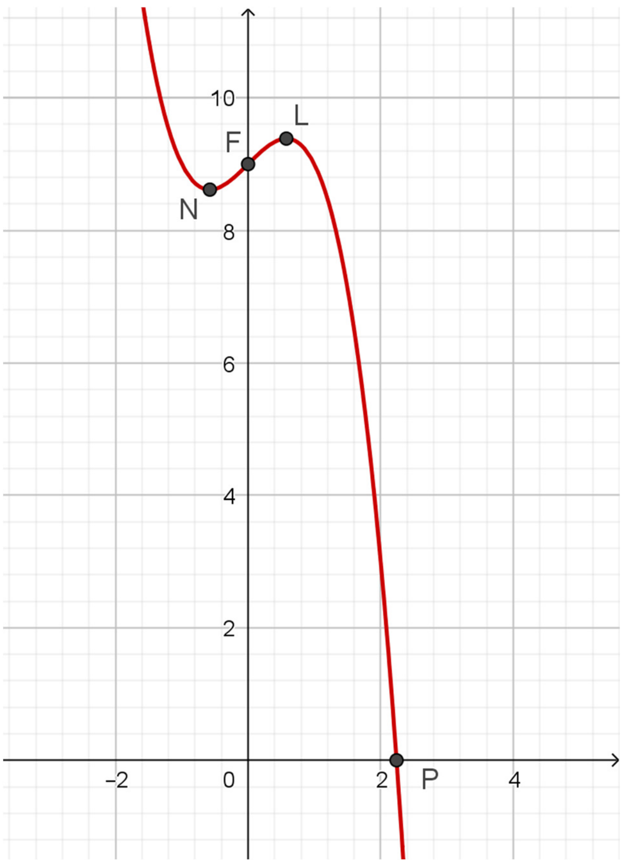
- s_k , retta tangente in $Q(1;k+8)$ a Γ_k , ha coefficiente angolare $m_s = f'_k(1) = k - 3$ ed equazione:

$$y - k - 8 = (k-3)(x-1)$$

Le due rette si intersecano nel punto M di cui si vuole verificare che l'ascissa è 2/3:

$M = r_k \cap s_k$: $\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k-3)x + 11 \end{cases}$, che, risolto, dà $x_M = \frac{2}{3}$.

Punto 2



Il punto M, appartenente a r_k, ha ordinata $y = \frac{2}{3}k + 9$.

Si ha:

$$\frac{2}{3}k + 9 < 10 \quad \to \quad \frac{2}{3}k < 1 \quad \to$$

$$k < \frac{3}{2} \quad \to \quad \boldsymbol{k = 1.}$$

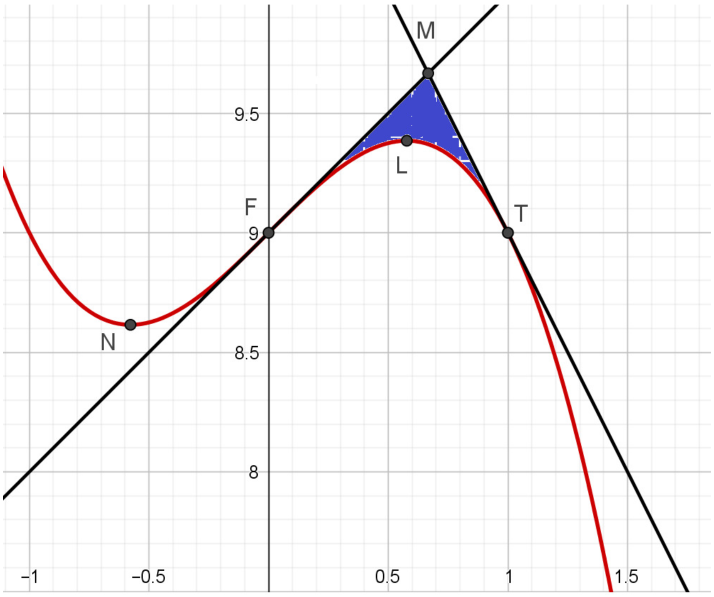
Si ottiene:

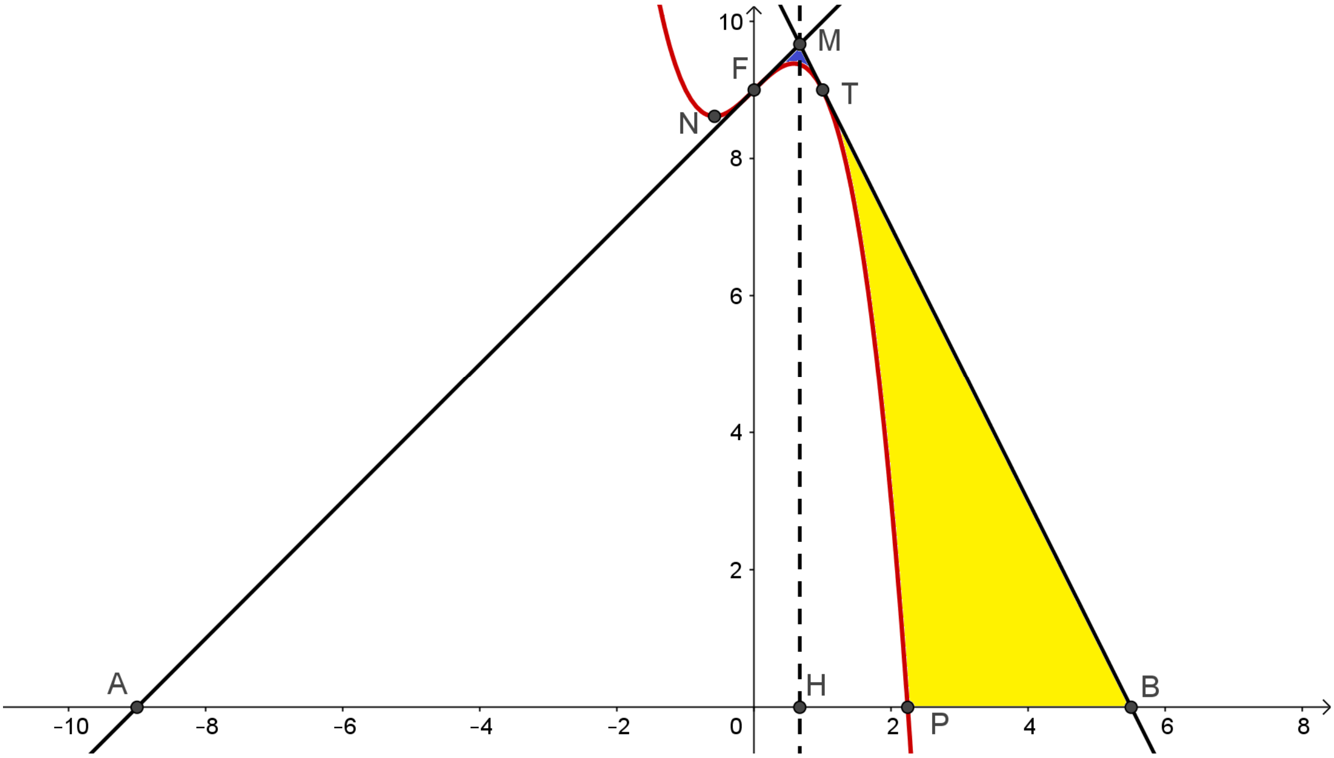
$$y = f_1(x) = -x^3 + x + 9$$

la cui derivata prima è $y' = -3x^2 + 1$. Quindi il minimo e il massimo relativi hanno rispettivamente coordinate: $N\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 9 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, $L\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 9 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.

La derivata seconda è $y'' = -6x$; quindi il flesso F ha ovviamente coordinate $(0;9)$, ed è il centro di simmetria della curva.

Punto 3





La probabilità richiesta si calcola (in modo approssimato) facendo il rapporto tra la somma delle aree delle regioni blu e gialla del triangolo *ABM* e l'area del triangolo *ABM*.

L'area del triangolo *ABM* è $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MH}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+9\right)\frac{29}{3}=\frac{841}{12}$.

L'area della parte blu è:

$$\int_0^{\frac{2}{3}}[(x+9)-(-x^3+x+9)]\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}[(-2x+11)-(-x^3+x+9)]\,dx=\frac{4}{81}+\frac{11}{324}=\frac{1}{12}$$

L'area della parte gialla è:

$$\int_1^{\alpha}[(-2x+11)-(-x^3+x+9)]\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{11}{2}}(-2x+11)\,dx=\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^2}{2}-9\alpha+\frac{59}{2}$$

essendo α l'ascissa del punto P di intersezione della curva con l'asse delle ascisse.
Calcolando un valore approssimato di α alla seconda cifra decimale tramite il metodo di bisezione (applicabile poiché nell'intervallo $[2, 3]$ sussistono le ipotesi del Teorema di Bolzano) otteniamo $\alpha \sim 2{,}24$.
[Qui l'utilità di una calcolatrice grafica per determinare un valore approssimato di α è evidente perché si trova immediatamente, con successivi ingrandimenti della finestra grafica, che $\alpha \sim 2{,}24$].
Quindi la probabilità (approssimata) richiesta è circa

$$p = \frac{\frac{1}{12}+\frac{2{,}24^4}{4}-\frac{2{,}24^2}{2}-9\cdot(2{,}24)+\frac{59}{2}}{\frac{841}{12}} = 0{,}18847\ldots \sim 18{,}9\%.$$

Punto 4

Sia $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \ldots\ldots\ldots. + a_{n-1}x + a_n$ una generica funzione polinomiale di grado $n > 0$.
Scriviamo la generica equazione della normale alla funzione polinomiale in un suo punto P di ascissa $x = \alpha$. Si ottiene:

$$y - p(\alpha) = -\frac{1}{p'(\alpha)}(x-\alpha) \quad \text{con} \quad p'(\alpha) \neq 0.$$

Tuttavia, per non perdere di generalità, conviene scrivere l'equazione della retta nomale sotto forma implicita (che rimane valida anche se $p'(\alpha) = 0$):

$$(x-\alpha) + p'(\alpha)\left(y - p(\alpha)\right) = 0 .$$

Imponiamo il passaggio per l'origine degli assi O e otteniamo:

$$-\alpha + p'(\alpha)\left(-p(\alpha)\right) = 0$$

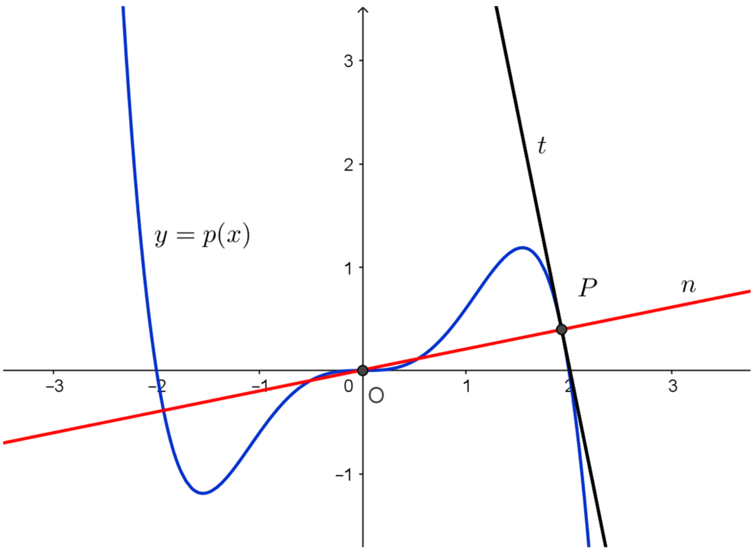
ossia

$$p(\alpha)\cdot p'(\alpha) = -\alpha .$$

Si ha quindi:

$$\left(a_0\,\alpha^n + a_1\,\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,\alpha + a_n\right)\cdot\left(a_0\,n\,\alpha^{n-1} + a_1\,(n-1)\,\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) = -\alpha .$$

Abbiamo quindi ottenuto un'equazione polinomiale di grado $2n - 1$ nella incognita α, che ha al più $2n - 1$ soluzioni (per il Teorema fondamentale dell'algebra).



Giudizio sul problema

Livello di difficoltà	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto	
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ In modo forzato	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici?	☐ Sì	☒ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro		
Di solito, viene svolto?	☐ Sì	☐ No	☒ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ Mai	☐ Non sempre	☒ Sempre		
Formulazione	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☒ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		

Commento sintetico

Il livello di difficoltà del problema 2 è piuttosto alto. Alcuni punti, come il 4), richiedono una capacità di astrazione del tutto inusuale anche nei Licei Scientifici.
Si noti che nel punto 3) era richiesto il calcolo di un integrale definito in cui un estremo di integrazione è un valore approssimato. In questo caso (ma non solo in questo…) era utile usare una calcolatrice grafica, almeno per determinare velocemente lo zero della funzione (che era circa 2,24).

Si noti che la soluzione simbolicamente esatta dell'equazione $x^3 - x - 9 = 0$ (ricavabile con la formula di Cardano, non prevista dalle *Indicazione nazionali*) era del tutto inutilizzabile nel calcolo dell'integrale:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{1}{27}}} \approx 2,24004...$$