MATEMATICA - Esempio di prova per il Liceo Scientifico - MIUR - 20.12.2018

PROBLEMA 1 (soluzione di L. Tomasi)

Fissati due parametri reali $S > 0, k > 0$, considera la funzione:

$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con Γ_k.

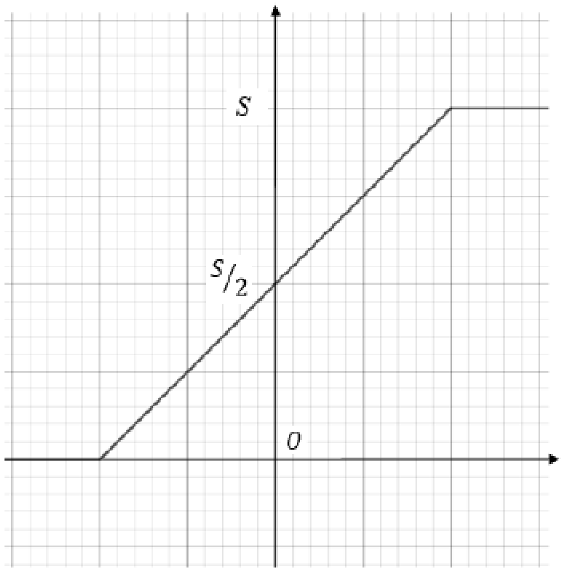
La funzione $f_k(x)$ può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.

1. Dimostra che i valori assunti dalla funzione $f_k(x)$ si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore S, dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.

2. Osservando Γ_k, individua la trasformazione geometrica da applicare a Γ_k per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.

3. Individua graficamente o analiticamente il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$; determina quindi, in funzione dei parametri S e k, il valore di tale velocità massima.

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione $f_k(x)$ con una funzione come $g_k(x)$, il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di $g_k(x)$ passa da 0 a S con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0.

4. Determina, in funzione dei parametri S e k, l'espressione analitica della funzione $g_k(x)$.
5. Illustra il procedimento che adotteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$.
6. All'aumentare di k, tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

Soluzione.

La famiglia di funzioni data rappresenta delle curve logistiche.

Punto 1.

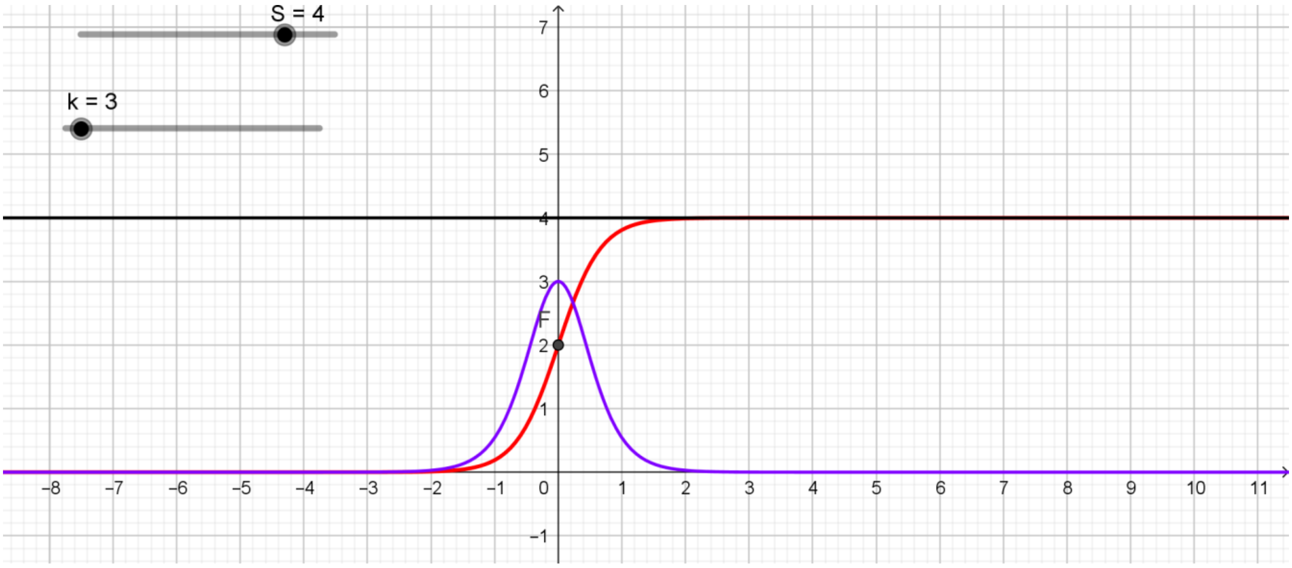
Le funzioni date sono positive per ogni valore della *x*. Hanno come dominio l'insieme dei numeri reali. Si hanno i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{S}{1+e^{-kx}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{S}{1+e^{-kx}} = S .$$

Quindi la retta di equazione $y = S$ è asintoto orizzontale destro per il grafico di tutte le funzioni; l'asse delle *x* è asintoto orizzontale sinistro. Se si vuole dare un significato a questa funzione per la crescita di una popolazione di batteri occorre ipotizzare $x \geq 0$ (*x* è il tempo) e traslarla verso destra.

La derivata prima della funzione è la seguente: $f_k'(x) = \dfrac{kSe^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2}$; essa è positiva per ogni valore delle *x*. Quindi la funzione $f_k(x) = \dfrac{S}{1+e^{-kx}}$ è crescente su R. Si conclude che $0 < f_k(x) < S$, per ogni *x* reale (e per ogni parametro $k > 0$).



Nel grafico è stata rappresentata la funzione $f_k(x)$, per $k = 3$, e il grafico della sua derivata prima.

Punto 2.

La funzione $f_k(x)$ si trasforma in una funzione dispari se la si sottopone a questa traslazione:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \dfrac{S}{2} \end{cases}$$

Si ricava $y = Y + \dfrac{S}{2}$. Sostituendo, si ottiene: $Y = \dfrac{S}{1+e^{-kX}} - \dfrac{S}{2}$. Tornando a indicare le variabili con *x* e *y*, si ha $y = \dfrac{S}{1+e^{-kx}} - \dfrac{S}{2}$. Chiamiamo $F_k(x)$ questa funzione. Si ha:

$$F_k(x) = \frac{S}{1+e^{-kx}} - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}\cdot\left(\frac{2}{1+e^{-kx}} - 1\right) = \frac{S}{2}\cdot\left(\frac{e^{kx}-1}{e^{kx}+1}\right) = \frac{S}{2}\cdot\tanh\left(\frac{kx}{2}\right).$$

La funzione $F_k(x)$ è dispari perché il dominio è R e inoltre si ha:

$$F_k(-x) = \frac{S}{2}\cdot\left(\frac{1-e^{kx}}{1+e^{kx}}\right) = \frac{S}{2}\cdot\left(\frac{\dfrac{1-e^{kx}}{e^{kx}}}{\dfrac{1+e^{kx}}{e^{kx}}}\right) = \frac{S}{2}\cdot\left(\frac{e^{-kx}-1}{e^{-kx}+1}\right) = -\frac{S}{2}\cdot\left(\frac{1-e^{-kx}}{1+e^{-kx}}\right) = -F_k(x)$$

oppure, più semplicemente, perché $t(x) = \tanh\left(\dfrac{kx}{2}\right)$ è una funzione dispari.

Punto 3.

La massima velocità di crescita si trova calcolando la derivata prima della funzione $f_k(x)$:

$$f_k'(x) = \frac{kSe^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2} = \frac{kS}{e^{kx}\left(1+2e^{-kx}+e^{-2kx}\right)} = \frac{kS}{e^{kx}+2+e^{-kx}} = \frac{kS}{2\left(1+\cosh(kx)\right)}$$

e determinandone il massimo. La derivata prima $f_k'(x)$ è una funzione pari perché $\cosh(kx)$ è una funzione pari.

Ricavando la derivata seconda si trova:

$$f_k''(x) = -\frac{k^2S}{2}\frac{\sinh(kx)}{\left(1+\cosh(kx)\right)^2}.$$

La derivata seconda è una funzione dispari che ha lo stesso segno di $-\sinh(kx)$: quindi la derivata seconda è positiva per $x<0$ e negativa per $x>0$.

Il massimo della velocità di crescita (cioè della derivata prima) si ha quindi per $x=0$, nel punto di flesso della curva logistica $f_k(x)$, e vale $f_k'(0) = \dfrac{k\,S}{4}$.

Punto 4

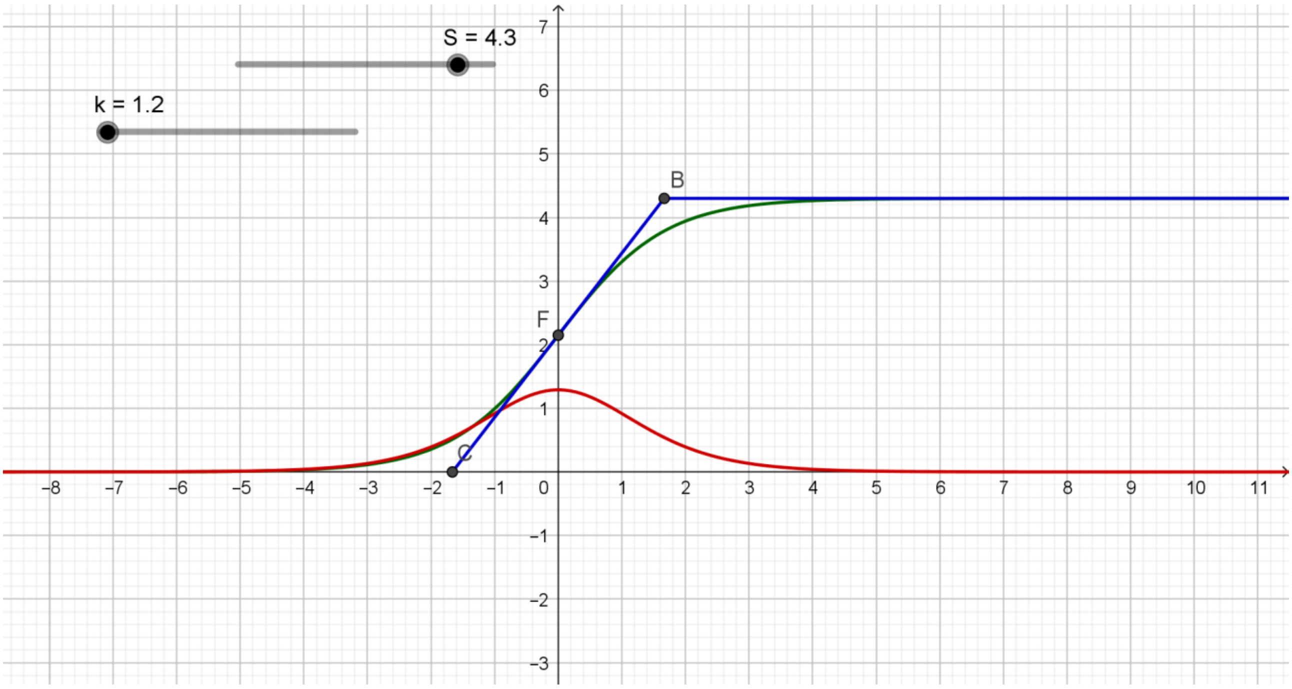
La pendenza della curva logistica per $x=0$ è $f_k'(0)=\frac{kS}{4}$. Il punto $F\left(0,\frac{S}{2}\right)$ è il punto di flesso della curva logistica ed è il centro di simmetria della curva.

La retta tangente nel flesso F ha equazione: $y-\frac{S}{2}=\frac{kS}{4}x$, ovvero $y=\frac{kS}{4}x+\frac{S}{2}$. Intersecando la retta tangente nel flesso F con l'asse delle ascisse si ottiene il punto di coordinate $C\left(-\frac{2}{k},0\right)$.

La funzione $g_k(x)$ è pertanto definita nel seguente modo:

$$g_k(x)=\begin{cases} 0 & , x<-\frac{2}{k} \\ \frac{kS}{4}x+\frac{S}{2} & , -\frac{2}{k}\le x\le\frac{2}{k} \\ S & , x>\frac{2}{k} \end{cases}$$

Il grafico della funzione $g_k(x)$ è riportato di seguito (disegnato in blu) per $k=1,2$ (ed $S=4.3$).



Punto 5.

Per valutare l'accettabilità di $g_k(x)$ come approssimazione di $f_k(x)$ si può determinare il seguente integrale, che rappresenta l'area compresa tra i grafici delle due curve (per il calcolo si sfrutta la simmetria dei grafici rispetto al punto F, flesso della famiglia di curve logistiche):

$$\delta=2\int_0^{+\infty}\left(g_k(x)-f_k(x)\right)dx$$

e porlo minore di un valore prefissato, per esempio minore di $\varepsilon=\frac{1}{100}$.

Questo integrale è dato da

$$\delta = 2\int_0^{+\infty} \left(g_k(x) - f_k(x)\right)dx =$$

$$2\left(\int_0^{\frac{2}{k}} \left(g_k(x) - f_k(x)\right)dx + \int_{\frac{2}{k}}^{+\infty} \left(S - f_k(x)\right)dx\right) =$$

$$2\left(\int_0^{\frac{2}{k}} \left(\frac{kSx}{4} + \frac{S}{2} - \frac{S}{1+e^{-kx}}\right)dx + \int_{\frac{2}{k}}^{+\infty} \left(S - \frac{S}{1+e^{-kx}}\right)dx\right) =$$

$$2S\left(\int_0^{\frac{2}{k}} \left(\frac{kx}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-kx}}\right)dx + \int_{\frac{2}{k}}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-kx}}\right)dx\right) = 2S\left(I + J\right).$$

Il primo integrale vale:

$$I = \int_0^{\frac{2}{k}} \left(\frac{kx}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-kx}}\right)dx = \left[\frac{kx^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{k}\ln(1+e^{kx})\right]_0^{\frac{2}{k}} =$$

$$= \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\ln(1+e^2) + \frac{1}{k}\ln 2 = \frac{1}{k}\left(\frac{3}{2} - \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)\right)$$

Il secondo integrale vale:

$$J = \int_{\frac{2}{k}}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-kx}}\right)dx = \int_{\frac{2}{k}}^{+\infty} \left(\frac{e^{-kx}}{1+e^{-kx}}\right)dx = -\frac{1}{k}\int_{\frac{2}{k}}^{+\infty} \left(\frac{-ke^{-kx}}{1+e^{-kx}}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{k} \cdot \lim_{b\to+\infty} \left[\ln(1+e^{-kx}) - \ln(1+e^{-2})\right]_{\frac{2}{k}}^{b} = \frac{1}{k}\ln(1+e^{-2})$$

In definitiva si ottiene che l'approssimazione vale:

$$\delta(k) = 2S(I+J) = \frac{2S}{k}\left(\frac{3}{2} - \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \ln(1+e^{-2})\right) = \frac{2S}{k}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Al tendere di k a $+\infty$ questa differenza tende a 0 e quindi i grafici delle due funzioni $g_k(x)$ e $f_k(x)$ tendono a coincidere.

Giudizio sul problema

Livello di difficoltà	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☒ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☐ Sì		☐ No	☒ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR (Quadro di Riferimento)	☐ Sì		☒ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro

Di solito, viene svolto?	☐ Sì	☒ No	☐ Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	☐ No	☒ Non sempre	☐ Sempre		
Formulazione	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☒ Solo parzialmente	☐ No		
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente		

Nota. Ringrazio M.A. Chimetto e R. Marazzato per alcune osservazioni e correzioni.